И.В. Бабичева,
Т.Е. Болдовская

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

(В ФОРМУЛАХ, ТАБЛИЦАХ, РИСУНКАХ)

Учебное пособие

Омск – 2010

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Сибирская государственная автомобильно-дорожная
академия (СибАДИ)»

И.В. Бабичева, Т.Е. Болдовская

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ
(В ФОРМУЛАХ, ТАБЛИЦАХ, РИСУНКАХ)

Учебное пособие

Издание 2-е, исправленное и дополненное

*Допущено Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных
заведений, обучающихся по направлениям:
190600 «Эксплуатация наземного транспорта
и транспортного оборудования»,140500 «Энергомашиностроение»,
140600 «Электротехника, электромеханика и электротехнологии»*

Омск
СибАДИ
2010

УДК 51(083)
ББК 22.1я 2
Б 12

Рецензенты:
А.К. Гуц, д-р физ.-мат. наук, профессор, декан факультета компьютерных наук, заведующий кафедрой кибернетики Омского государственного университета им. Ф.М. Достоевского;
Л.Г. Кузнецова, д-р пед. наук

Работа одобрена редакционно-издательским советом академии в качестве учебного пособия для студентов инженерных специальностей.

Бабичева И.В., Болдовская Т.Е.
Б 12 Справочник по математике (в формулах, таблицах, рисунках): учебное пособие / И.В. Бабичева, Т.Е. Болдовская. – 2-е изд., исп. и доп. – Омск: СибАДИ, 2010. – 148 с.

ISBN 978-5-93204-540-4

Содержит основные понятия, определения, формулы элементарной и высшей математики, знание которых необходимо как при ознакомлении с курсом высшей математики, так и при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин.

Материал справочника иллюстрирован большим количеством рисунков, таблиц и схем.

Адресован студентам инженерных специальностей.

ISBN 978-5-93204-540-4

СОДЕРЖАНИЕ

Я слышу и забываю,
Я вижу и запоминаю,
Я делаю и понимаю.
Конфуций

Условные обозначения

Математика – наука формализованная. В течение веков выкристаллизовывались ее язык, ее символика, способствующие компактности изложения материала.

1. $\in$ – принадлежать, $\notin$ – не принадлежать.
2. $\cup$ – объединение, $\cap$ – пересечение.
3. $\Rightarrow$ – логическое следствие.
3. $\Leftrightarrow$ – логическая эквивалентность (тогда и только тогда).
4. $\forall$ – квантор всеобщности (для любого, для всякого).
5. $\exists$ – квантор существования.
6. $\sum$ – сумма: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.
7. $\|$ – параллельность (прямых), коллинеарность (векторов).
8. $\perp$ – перпендикулярность (прямых, векторов).
9. $\uparrow\uparrow$ – сонаправленность (векторов), $\uparrow\downarrow$ – противоположная направленность (векторов).
10. $=$ – равно, $\neq$ – не равно.
11. $\approx$ – приближенно равно.
12. $>$ – больше, $<$ – меньше.
13. $\geq$ – больше или равно, $\leq$ – меньше или равно.
14. % – процент (сотая доля).

Раздел 1. АЛГЕБРА

Действия с дробями

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Пропорции

Пропорцией называется равенство двух отношений: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ или $a : b = c : d$. Основное свойство пропорции: $ad = bc$.

Перестановка членов пропорции

$a : b = c : d$	$c : d = a : b$
$d : b = c : a$	$b : d = a : c$
$a : c = b : d$	$c : a = d : b$
$d : c = b : a$	$b : a = d : c$

Квадратное уравнение

Вид уравнения	Корни уравнения
$ax^2 + bx + c = 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$ax^2 + c = 0$	$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$	$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$
$x^2 + px + q = 0$	Т. Виета $x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$
$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Формулы сокращённого умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right),$$
$$a^m - b^m = (a-b)\left(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}\right).$$

Действия со степенями и корнями

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}, \quad n \in N$ $\qquad a^0 = 1, \ (a \neq 0)$ $\qquad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$ $\qquad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$ $\qquad \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $\qquad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\qquad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Логарифмы

$$\log_a b = x \ \Rightarrow \ a^x = b, \quad a > 0, a \neq 1.$$

$a^{\log_a b} = b$ − *основное логарифмическое тождество.*

Десятичный логарифм – $\log_{10} N = \lg N$, *натуральный логарифм* – $\log_e N = \ln N$, где $e = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718281828459045\ldots$

$\log_a 1 = 0$ $\qquad \log_a a = 1$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $\qquad \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

$\log_a u + \log_a v = \log_a (u \cdot v)$ $\qquad \log_a u - \log_a v = \log_a \left(\dfrac{u}{v}\right)$

$n \log_a b = \log_a b^n$ $\qquad \log_a 0 = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & a < 1 \end{cases}$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (d – *разность* арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$)	*Геометрическая прогрессия* – числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, умноженному на одно и то же число q (q – *знаменатель* геометрической прогрессии $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$)
$d > 0$ – прогрессия возрастающая; $d < 0$ – прогрессия убывающая	$q > 1$ – прогрессия возрастающая; $\lvert q\rvert < 1$ – прогрессия убывающая; $q < 0$ – прогрессия знакопеременная
Общий член прогрессии:	
$a_n = a_1 + (n-1)d$	$u_n = u_1 q^{n-1}$
Сумма n первых членов прогрессии:	
$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$ или $S_n = \frac{[2a_1 + d(n-1)]\cdot n}{2}$	$S_n = \frac{u_1 - u_n \cdot q}{1-q}$, $(q \neq 1)$. Если $\lvert q\rvert < 1$, то $S = \frac{u_1}{1-q}$ – сумма *бесконечно убывающей* прогрессии

Проценты

Процент – сотая часть числа.

$\frac{a}{100\%} = 0{,}01a$ – 1 % от числа a; $\frac{a}{100\%}\cdot x = 0{,}01ax$ – x % от числа a;

$\frac{a}{b} = \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = \frac{100a}{b}$ – a составляет x % от b.

Средние величины

1. Среднее арифметическое n чисел: $m_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$.
2. Среднее геометрическое n чисел: $m_g = \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n}$.
3. Среднее гармоническое n чисел: $m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}$.

Раздел 2. ТРИГОНОМЕТРИЯ

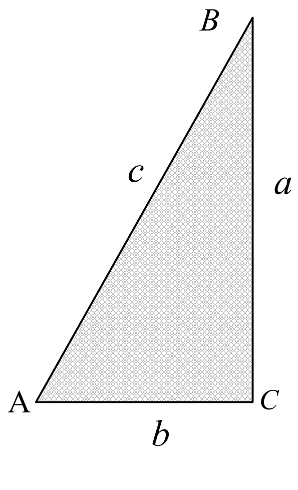
Сравнительная таблица градусной и радианной мер углов

$$1\text{ радиан} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17' 45'';\quad 1^0 = \frac{\pi}{180}\text{радиана} \approx 0{,}017453\text{ радиана};$$

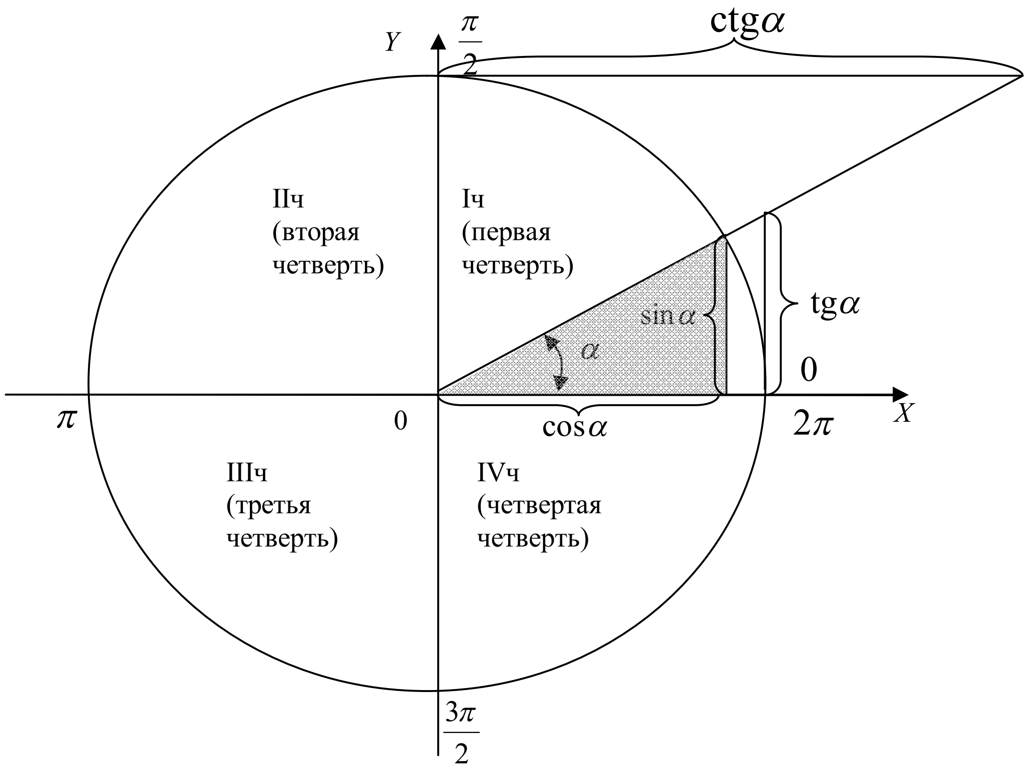
$$1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60}\text{радиана} \approx 0{,}000291\text{радиана}.$$

Углы в градусах	Углы в радианах	Углы в градусах	Углы в радианах
0	0	150	$\frac{5\pi}{6}$
30	$\frac{\pi}{6}$	180	π
45	$\frac{\pi}{4}$	225	$\frac{5\pi}{4}$
60	$\frac{\pi}{3}$	240	$\frac{4\pi}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	270	$\frac{3\pi}{2}$
120	$\frac{2\pi}{3}$	300	$\frac{5\pi}{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	360	2π

Тригонометрические функции и их знаки



Функция и ее название	Аргумент φ	
	$\varphi = A$	$\varphi = B$
$\sin\varphi$ (синус)	a/c	b/c
$\cos\varphi$ (косинус)	b/c	a/c
$\text{tg}\ \varphi$ (тангенс)	a/b	b/a
$\text{ctg}\varphi$ (котангенс)	b/a	a/b
$\sec\varphi$ (секанс)	c/b	c/a
$\text{cosec}\varphi$ (косеканс)	c/a	c/b



Четверть	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

Значения тригонометрических функций некоторых углов

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\mathrm{ctg}\, x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Тригонометрические тождества

Операции над тригонометрическими функциями	Тождества
Соотношения между тригонометрическими функциями	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ – основное тригонометрическое тождество; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$; $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$; $\mathrm{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$; $\sec^2\alpha=1+\mathrm{tg}^2\alpha$; $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha}=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$; $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$
Формулы для суммы и разности углов	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$; $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$
Формулы двойного угла	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=1-2\sin^2\alpha$ $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$; $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$
Формулы понижения степени	$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$;$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$
Формулы преобразования суммы и разности в произведение тригонометрических функций	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

Окончание таблицы

	$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$**;** $\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и разность	$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$**;** $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$**;** $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$**;** $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}$

Формулы приведения

α	sin	cos	tg	ctg
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$
$\pi\pm\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$
$2\pi\pm\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$

Правило получения формул приведения.

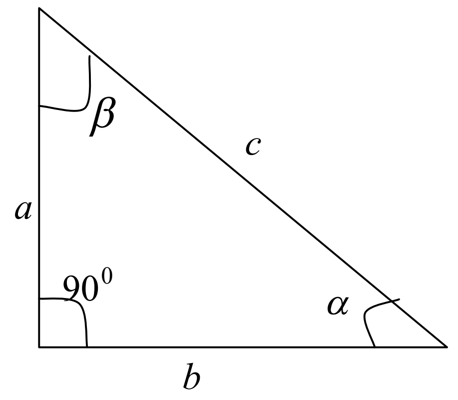
1) Если угол откладывается от горизонтальной оси (для углов $\pi\pm\alpha; 2\pi\pm\alpha$), название исходной функции сохраняется. Если угол откладывается от вертикальной оси (для углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha; \frac{3\pi}{2}\pm\alpha$), название исходной функции заменяется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

2) В правой части формулы ставится тот же знак, который имеет левая часть при условии $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

П р и м е р. $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = +\cos\alpha$ (синус во второй четверти положителен, угол откладывается от вертикальной оси).

Раздел 3. ПЛАНИМЕТРИЯ И СТЕРЕОМЕТРИЯ

Площади фигур



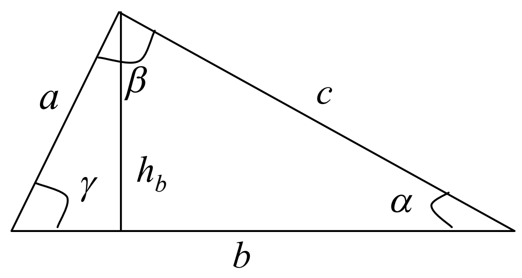
Прямоугольный треугольник

a, b – катеты, c – гипотенуза,

α, β – острые углы,

$$S = \frac{ab}{2},$$

$c^2 = a^2 + b^2$ – теорема Пифагора.



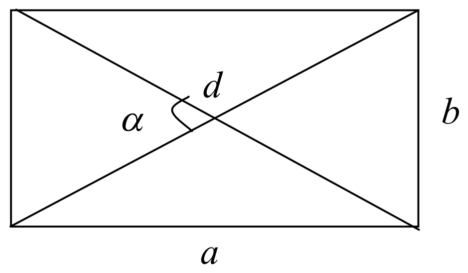
Произвольный треугольник

$$S = \frac{cb}{2}\sin\alpha = \frac{bh_b}{2},$$

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр,

r – радиус вписанной окружности,

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



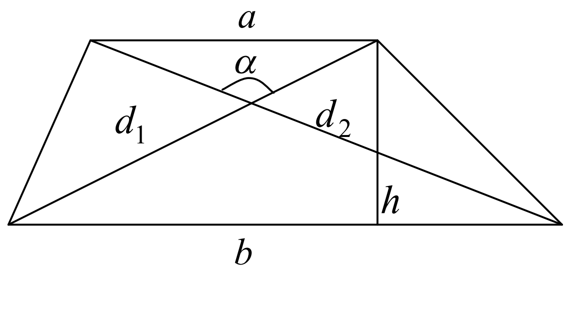
Прямоугольник

a – длина (основание),

b – ширина (высота),

d – диагональ,

$$S = ab = \frac{d^2}{2}\sin\alpha.$$



Трапеция

h – высота,

a, b – основания,

$$S = \frac{a+b}{2}h = \frac{d_1 d_2}{2}\sin\alpha.$$

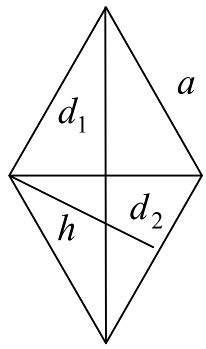
Ромб

a – сторона,

d_1, d_2 – диагонали,

h – высота,

$$S = ah = \frac{d_1 d_2}{2}.$$



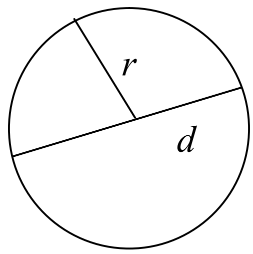
Окружность и круг

d – диаметр окружности (круга), r – радиус окружности (круга), длина окружности:

$$C = \pi d = 2\pi r,$$

площадь круга:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2 = \frac{rC}{2}.$$



Круговой сектор

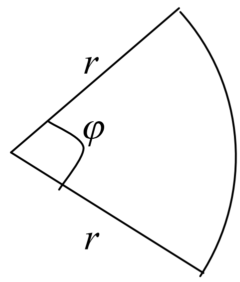
r – радиус,

l – длина дуги,

φ° – градусная мера дуги,

$$l = \frac{2\pi r\varphi^\circ}{360^0},$$

$$S = \frac{\pi r^2 \varphi^\circ}{360}.$$



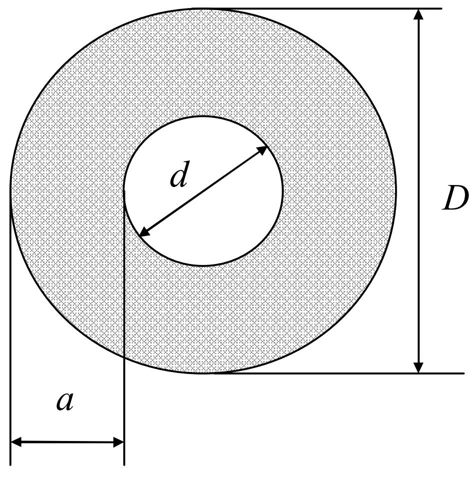
Круговое кольцо

D – большой диаметр,

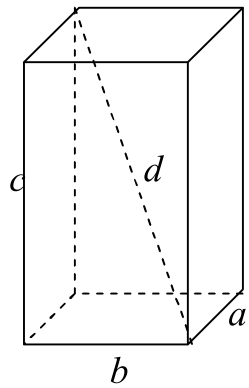
d – малый диаметр,

a – ширина кольца,

$$S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2).$$



Площади поверхностей и объемы тел



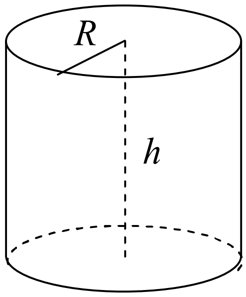
Прямоугольный параллелепипед

d – диагональ параллелепипеда,

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c} \ ,$$

$$S = 2(ab + ac + bc)\,,$$

$$V = abc\,.$$

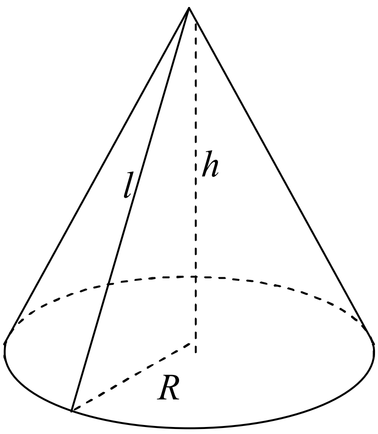


Цилиндр (прямой круговой)

$$S_{боковой} = 2\pi Rh\,,$$

$$S_{полной} = 2\pi R(h + R)\,,$$

$$V = \pi R^2 h\,.$$



Конус (прямой круговой)

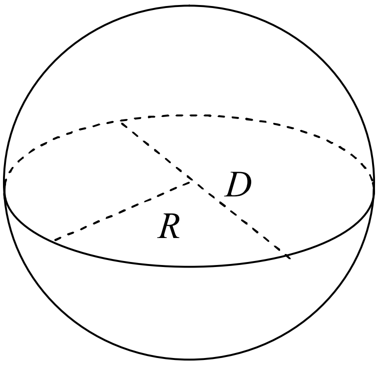
l – образующая конуса**,**

$$l = \sqrt{R^2 + h^2}\,,$$

$$S_{боковой} = \pi Rl\,,$$

$$S_{полной} = \pi R(R + l)\,,$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h\,.$$



Сфера и шар

S – площадь сферы,

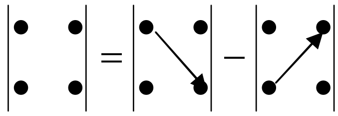
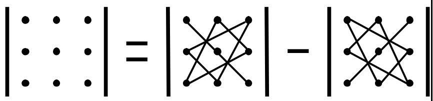
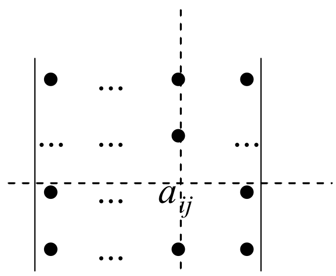
$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2\,,$$

V – объем шара,

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

Раздел 4. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Определители

Обозначение	Правило вычисления	Схема вычисления
Определитель 2-го порядка $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$	$\Delta_2 = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$	
Определитель 3-го порядка $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	*Правило треугольников* $\Delta_3 = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$ $+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$ $- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$	
Определитель n-го порядка $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$	*Разложение определителя по элементам* i *-й строки* $\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} +$ $+ \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$, где A_{ij} – *алгебраическое дополнение* к элементу a_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, M_{ij} – *минор* к элементу a_{ij} – определитель (n-1)-го порядка, получаемый из определителя Δ_n вычёркиванием i-й строки и j-го столбца	Получение минора к элементу a_{ij} 

П р и м е р. Вычислить определитель $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

Р е ш е н и е

Вычисление по правилу треугольников	Разложение по элементам первой строки
$\Delta_3 = 2 \cdot 3 \cdot 6 + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 5 \cdot 8 -$ $-8 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 5 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 218$	$\Delta_3 = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} =$ $= 2 \cdot 28 - 4 \cdot (-46) + 1 \cdot (-22) = 218$

Виды матриц

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$$ – *матрица* размерности $m \times n$,

где m – число строк; n – число столбцов.

Виды матриц	Пример
Квадратная $A_{n,n}=A_n \Leftrightarrow m=n$	$A_n=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
Единичная $E_n=(\delta_{ij}) \Leftrightarrow \delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$	$E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Нулевая $O_n=(a_{ij)} \Leftrightarrow a_{ij}=0, \quad \forall i,j$	$O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Диагональная $D_n=(d_{ij}) \Leftrightarrow d_{ij}=0, \quad \forall i \neq j$	$D_3=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$
Верхняя треугольная $T_n=(t_{ij}) \Leftrightarrow t_{ij}=0$ при $\forall i>j$	$T_3=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$
Нижняя треугольная $T_n=(t_{ij}) \Leftrightarrow t_{ij}=0$ при $\forall i<j$	$T_3=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
Симметричная матрица $S=\left(s_{ij}\right) \Leftrightarrow s_{ij}=s_{ji}$ при $\forall i \neq j$	$S=\begin{pmatrix} s_{11} & a & b \\ a & s_{22} & c \\ b & c & s_{33} \end{pmatrix}$

Действия над матрицами

Операция	Определение	П р и м е р
Сложение (вычитание) матриц $C = A \pm B$	$C_{m,n} = A_{m,n} \pm B_{m,n}$ $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$
Умножение матрицы на число $C = \alpha A$	$C_{m,n} = \alpha A_{m,n}$ $c_{ij} = \alpha a_{ij}$	$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$
Умножение матриц $C = A \cdot B$	$C_{m,n} = A_{m,l} \cdot B_{l,n}$ $c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} \cdot b_{kj}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$
Операция транспонирования матрицы $C = A^T$	$C_{m,n} = A_{n,m}{}^T$ $C = \left(a_{ij}\right)^T = (a_{ji})$	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$
Элементарные преобразования матрицы	1. Перемена местами двух строк (столбцов); 2. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля; 3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца)	1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \sim$ $\sim \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Основные понятия

Общий вид	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$ где a_{ij} – коэффициенты системы; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – свободные члены; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные
Матрица системы	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$
СЛАУ в матричной форме	$A \cdot X = B$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец из неизвестных x_i. $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец из свободных членов b_i
Решение СЛАУ	Совокупность чисел $x_i = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, которые обращают все уравнения системы в тождества. Каждое решение СЛАУ – *частное решение*. Совокупность всех частных решений – *общее решение*

Разновидности СЛАУ

Признак	Название	Определение
По количеству решений	Совместная Несовместная Определенная Неопределенная	Имеет хотя бы одно решение. Не имеет решений. Имеет одно решение. Имеет бесконечно много решений
По виду правой части	Однородная	B=0 (все $b_i = 0$). Всегда совместна, так как нулевое (тривиальное) решение (т.е. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$) является решением однородной системы
	Неоднородная	$B \neq 0$
По значению $\lvert A\rvert$ для случая $m = n$	Вырожденная	$\lvert A\rvert = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$
	Невырожденная	$\lvert A\rvert \neq 0$

Обратная матрица и ее нахождение

A^{-1} – *обратная* матрица к $A = \left(a_{ij}\right)_{n,n}$, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

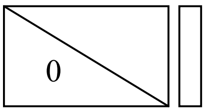
Этапы решения	Пример
Вычислить определитель матрицы. Если $\lvert A\rvert = 0$, то A^{-1} не существует	Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то $\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
Составить матрицу $\widetilde{A} = \left(A_{ij}\right)$, где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A	$\widetilde{A} = \left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$
Транспонировать $\widetilde{A}$	$\widetilde{A}^T = \left(A_{ij}\right)^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$
Записать обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{\lvert A\rvert}\left(\widetilde{A}\right)^T$	$A^{-1} = \frac{1}{\lvert A\rvert}\left(\widetilde{A}\right)^T = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

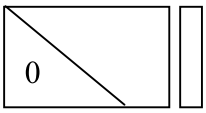
Методы решения СЛАУ

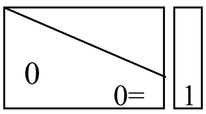
Метод решения	П р и м е р
Решение невырожденной СЛАУ по формулам Крамера (m=n) $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta},$ где Δ – определитель СЛАУ $(\Delta \neq 0)$; Δ_i – определитель, полученный из определителя системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов	$\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 4x+5y+6z=9, \\ 7x+8y=-6. \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27,$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -54,$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 27,$ $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 54,$ $x = \dfrac{-54}{27} = -2,\ y = \dfrac{27}{27} = 1,\ z = \dfrac{54}{27} = 2$
Решение невырожденной СЛАУ матричным способом (m=n) $AX = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$	$\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 4x+5y+6z=9, \\ 7x+8y=-6. \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \dfrac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

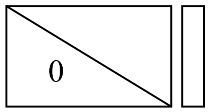
Окончание таблицы

Метод решения	П р и м е р
Решение СЛАУ методом Гаусса	

<table>
<tr>
<td>
(метод последовательного исключения неизвестных) ($m \neq m$)
Расширенную матрицу системы (матрица, составленная из коэффициентов системы с добавлением столбца свободных членов) $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$
с помощью элементарных преобразований, проводимых только над строками, приводят к ступенчатому виду
$$\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1k_2} & \dots & a'_{1k_r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & a'_{2k_2} & \dots & a'_{2k_r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a'_{rk_r} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{pmatrix}$$
После выполнения элементарных преобразований можно получить эквивалентную матрицу следующего типа:


Система совместна и определенна (имеет единственное решение).


Система совместна и неопределенна (имеет множество решений).


Система несовместна (решений нет)
</td>
<td>
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 9, \\ 7x + 8y = -6. \end{cases}$$
$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & -6 & -21 & -48 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{pmatrix}$$
Получена СЛАУ вида


Эквивалентная СЛАУ:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y + 2z = 5 \\ 9z = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$
Ответ: $x = -2$; $y = 1$; $z = 2$
</td>
</tr>
</table>

Собственные векторы, собственные значения матрицы и их нахождение

Пусть A – квадратная матрица порядка n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{n,n}.$$

Рассмотрим уравнение $AX = \lambda X$, где X – неизвестный числовой вектор высотой n.

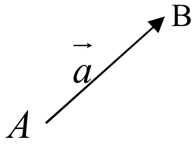
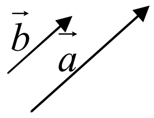
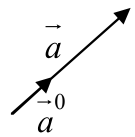
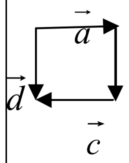
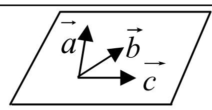
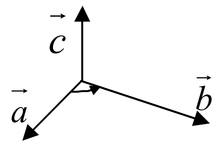
Уравнение $AX = \lambda X$ эквивалентно уравнению $(A - \lambda E)X = 0$.

Данное матричное уравнение соответствует однородной системе уравнений, которая имеет ненулевые решения, если $|A - \lambda E| = 0$. Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ называется *характеристическим уравнением* матрицы A.

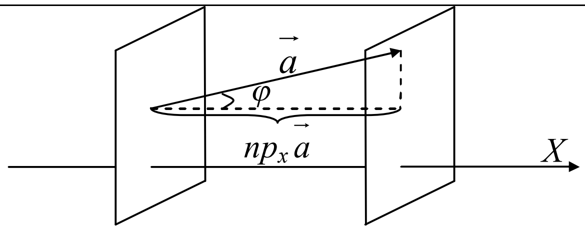
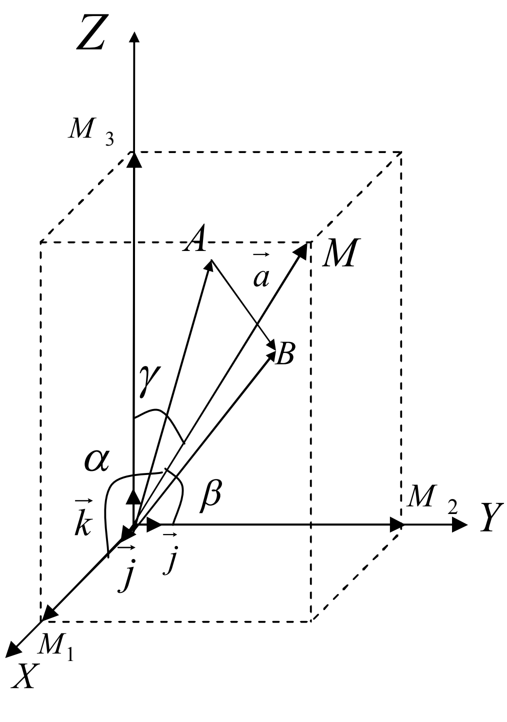
Значения λ, при которых уравнение имеет нетривиальные решения $(X \neq 0)$, называют *собственными значениями* матрицы A. Решения X уравнения при таких λ – *собственные векторы* матрицы.

Этапы решения	П р и м е р
Записать характеристическое уравнение матрицы $\lvert A - \lambda E\rvert = 0$	$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ $\lvert A - \lambda E\rvert = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$
«Раскрыв» определитель, получить n собственных значений	$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$, получаем $\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1$
Найти собственные векторы, соответствующие собственным значениям из векторного уравнения $(A - \lambda E)X = 0$	Подпространство собственных векторов, соответствующих $\lambda_1 = 5$, есть множество решений системы уравнений $(A - \lambda E)X = 0$: $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0; \\ -4x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$ $\Rightarrow L_1 = \{\mu(-1,1)\}, \quad \mu \in R$. Для $\lambda_2 = -1$ подпространство собственных векторов $L_2 = \{\mu(1,2)\}$

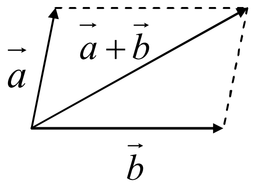
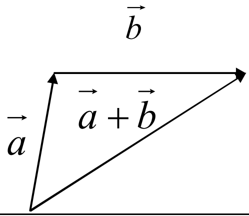
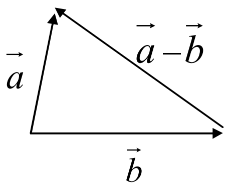
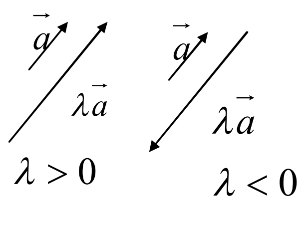
Раздел 5. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Основные понятия	Геометрическое изображение
Вектор $\overline{AB}$ ($\vec{a}$) – направленный прямолинейный отрезок, A – *начало* вектора, B – *конец* вектора. $\overline{BA}$ ($-\vec{a}$) – вектор, *противоположный* к вектору $\overline{AB}$ ($\vec{a}$). $\overline{AB} = -\overline{BA}$ ($\vec{a} = -\vec{a}$)	
$\vec{a}$ и $\vec{b}$ – *коллинеарные* векторы ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы могут быть *сонаправленными* ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) или *противоположно направленными* ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$)	 $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
$\lvert\vec{a}\rvert$ – *длина* или модуль вектора. Если $\lvert\vec{a}\rvert = 0$, то $\vec{a} = \vec{0}$ – нулевой вектор, если $\lvert\vec{a}\rvert = 1$, то $\vec{a} = \vec{e}$ – единичный вектор. $\vec{a}^{\,0}$ – *орт* вектора $\vec{a}$, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $\lvert\vec{a}\rvert = 1$.	
$\vec{a}$ и $\vec{b}$ – *равные* векторы ($\vec{a} = \vec{b}$), если $\begin{cases} \lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{b}\rvert, \\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}. \end{cases}$	 $\vec{d} = \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{c}$ ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$)
$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – *компланарные*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях	
Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует *правую (левую) тройку*, если с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке)	 Правая тройка
Линейная комбинация векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$ имеет вид $\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_3} + ... + \lambda_n \vec{a_n}$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – коэффициенты разложения. Система векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$ – *линейно независима*, если $\lambda_1 \vec{a_1} + ... + \lambda_n \vec{a_n} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 ... = \lambda_m = 0$. Система n линейно независимых векторов образует *базис* в n-мерном пространстве	Базис на плоскости (в R^2) образуют два неколлинеарных вектора $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$, в R^3 – три некомпланарных вектора $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ и $\vec{a_3}$

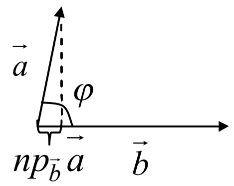
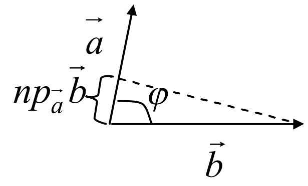
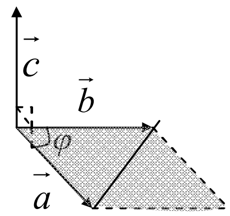
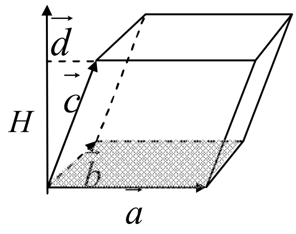
Векторы и координаты

Основные понятия	Рисунок	Определения и свойства
Ортогональная проекция вектора на ось		$np_x\vec{a} = \begin{cases} \lvert\overline{A_1B_1}\rvert, \vec{a}\uparrow\uparrow OX \\ -\lvert\overline{A_1B_1}\rvert, \vec{a}\uparrow\downarrow OX \end{cases}$ Ортогональная проекция $np_x\vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert\cos\varphi = a_x$; $np_x(\vec{a}\pm\vec{b}) =$ $= np_x\vec{a} \pm np_x\vec{b}$; $np_x\lambda\vec{a} = \lambda np_x\vec{a}$
Ортонормированный базис $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$		$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей $\vec{i}\perp\vec{j}\perp k$ $\lvert\vec{i}\rvert = \lvert\vec{j}\rvert = \lvert\vec{k}\rvert = 1$
Направляющие косинусы $cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$		Свойство $\cos^2\alpha + \cos^2\beta +$ $+\cos^2\gamma = 1$
Координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$		$a_x = np_x\vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert\cos\alpha,$ $a_y = np_y\vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert\cos\beta,$ $a_z = np_z\vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert\cos\gamma.$
Разложение вектора по базису $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$		$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} =$ $= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$
Длина вектора		$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$
Координаты вектора		$A(x_1, y_1, z_1)$; $B(x_2, y_2, z_2)$; $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Линейные операции над векторами

Операция	Определение и свойства	Выражение в координатах: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$
Сложение $\vec{a}+\vec{b}$ Правило параллелограмма  Правило треугольника  	$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$; $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}=-\vec{b}$	Равенство векторов: $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_x=b_x,\\a_y=b_y,\\a_z=b_z.\end{cases}$ $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+$ $+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}$, т.е. $\begin{cases}c_x=a_x+b_x,\\c_y=a_y+b_y,\\c_z=a_z+b_z\end{cases}$
Вычитание $\vec{a}-\vec{b}$  	$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$	$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x)\vec{i}+$ $+(a_y-b_y)\vec{j}+\ (a_z-b_z)\vec{k}$, т.е. $\begin{cases}c_x=a_x-b_x,\\c_y=a_y-b_y,\\c_z=a_z-b_z\end{cases}$
Умножение на число $\lambda\vec{a}$  	$\lambda\vec{a}=\vec{c}:\ \vec{c}\parallel\vec{a}$, $\begin{cases}\vec{c}\uparrow\uparrow\vec{a}\text{ при }\lambda>0;\\\vec{c}\uparrow\downarrow\vec{a}\text{ при }\lambda<0.\end{cases}$ $\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$; $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$; $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$; $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$	$\vec{c}=\lambda\vec{a}=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k}$, т.е. $\begin{cases}c_x=\lambda a_x,\\c_y=\lambda a_y,\\c_z=\lambda a_z,\end{cases}\Rightarrow$ $\Rightarrow$ коллинеарность векторов: $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$

Нелинейные операции над векторами

Скалярное произведение	Векторное произведение	Смешанное произведение
Определение и обозначение		
$\left(\vec a,\vec b\right)=\vec a\cdot\vec b=\left\vert\vec a\right\vert\left\vert\vec b\right\vert\cos\varphi$ $\Rightarrow\vec a\cdot\vec b=\left\vert\vec a\right\vert np_{\vec a}\vec b=\left\vert\vec b\right\vert np_{\vec b}\vec a$  	$\left[\vec a,\vec b\right]=\vec a\times\vec b=\vec c$ $\begin{cases}\left\vert\vec c\right\vert=\left\vert\vec a\right\vert\left\vert\vec b\right\vert\sin\varphi\\ \vec c\perp\vec a,\ \vec c\perp\vec b,\\ \vec a,\vec b,\vec c\ \text{правая тройка}\end{cases}$ 	$\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)=\left[\vec a,\vec b\right]\cdot\vec c$ Пусть $\vec d=\left[\vec a,\vec b\right]$, $\vec d\cdot\vec c=\left\vert\vec d\right\vert\cdot np_{\vec d}\vec c=S\cdot(\pm H)$, где S – площадь параллелограмма; H – высота параллелепипеда 
Алгебраические свойства		
$\vec a\cdot\vec b=\vec b\cdot\vec a$; $(\vec a+\vec b)\vec c=\vec a\vec c+\vec b\vec c$; $(\lambda\vec a)\vec b=\lambda(\vec a\vec b)$	$\vec a\times\vec b=-\vec b\times\vec a$; $(\vec a+\vec b)\times\vec c=\vec a\times\vec c+\vec b\times\vec c$; $(\lambda\vec a)\times\vec b=\lambda(\vec a\times\vec b)$	$\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)=-\left(\vec b,\vec a,\vec c\right)$; $\left(\lambda\vec a,\vec b,\vec c\right)=\lambda\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)$
Геометрические свойства		
$\cos\varphi=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{\left\vert\vec a\right\vert\cdot\left\vert\vec b\right\vert}$; $\left\vert\vec a\right\vert=\sqrt{\vec a\cdot\vec a}$; $np_{\vec a}\vec b=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{\left\vert\vec a\right\vert}$	$S_{\text{параллелограмма}}=\left\vert\vec a\times\vec b\right\vert$ $S_{\text{треугольника}}=\dfrac{\left\vert\vec a\times\vec b\right\vert}{2}$	$V_{\text{параллелепипеда}}=\left\vert\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)\right\vert$ $\vec a,\vec b,\vec c$ – правая (левая) тройка, если $(\vec a,\vec b,\vec c)>0$ $((\vec a,\vec b,\vec c)<0)$
Физические свойства		
Работа постоянной силы $A=\vec F\cdot\vec S$	Момент силы относительно точки O: $\vec M=\overline{OA}\times\vec F$	–
Условие равенства нулю		
$\vec a\cdot\vec b=0\Leftrightarrow\vec a\perp\vec b$	$\vec a\parallel\vec b\Leftrightarrow\vec a\times\vec b=\vec 0$	$\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)=0\Leftrightarrow\vec a,\vec b,\vec c$ – компланарны
Выражение в декартовых координатах		
$\vec a\cdot\vec b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$	$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$	$\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$

Раздел 6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

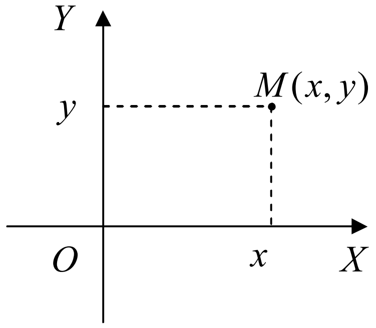
Системы координат

<table>
<tr><th>Название системы и способ задания</th><th>Связь между координатами</th></tr>
<tr><td>

Декартова (прямоугольная) система координат (ДСК)

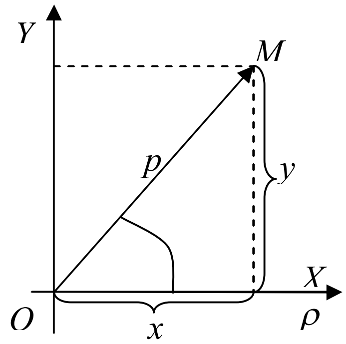
O − начало координат;

OX − ось абсцисс; OY − ось ординат



(x, y) − декартовы координаты точки M ; x – абсцисса, y – ордината

</td><td rowspan="2">



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

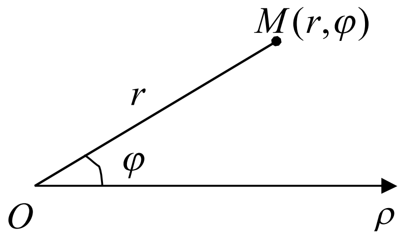
В частности, $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$, где $x \neq 0$.

$\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi n, n \in Z$. При определении значения полярного угла φ нужно установить (по знакам x и y) четверть, в которой лежит искомый угол

</td></tr>
<tr><td>

Полярная система координат (ПСК)

O − полюс; $O\rho$ − полярная ось



(r,φ)− полярные координаты точки M ; φ − полярный угол, $-\pi < \varphi \leq \pi$ (или $0 \leq \varphi < 2\pi$);

$r = |OM|$ − полярный радиус; $0 \leq r < \infty$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

П р и м е р.

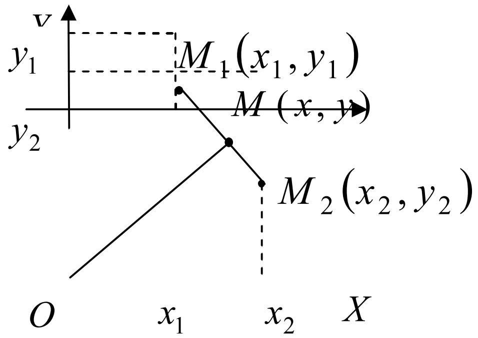
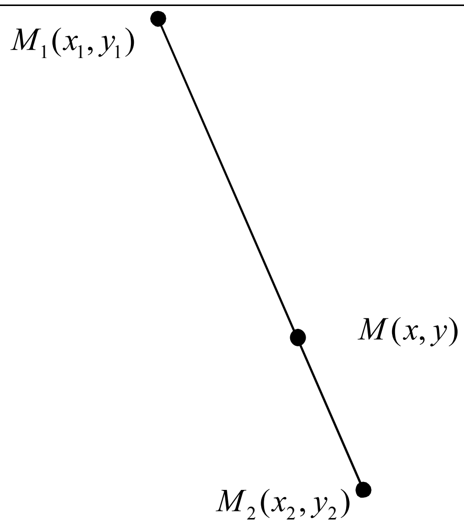
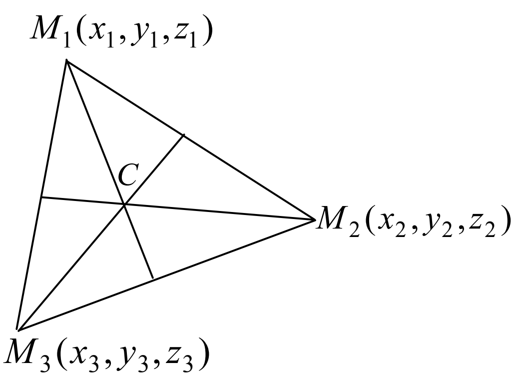
Дана точка $M(1,-\sqrt{3})$. Найти полярные координаты точки M .

Р е ш е н и е. $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$. Отсюда $\varphi = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

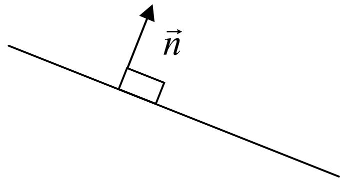
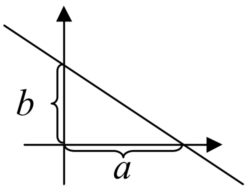
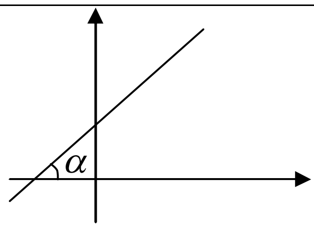
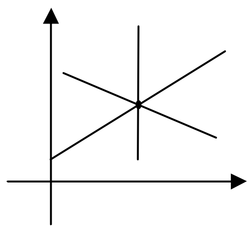
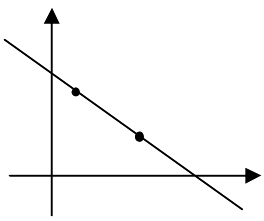
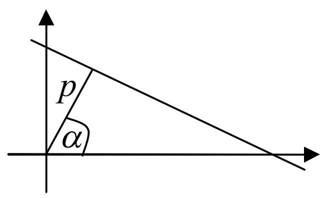
Так как точка $M(1,-\sqrt{3})$ лежит в 4-й четверти, то $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$

</td></tr>
</table>

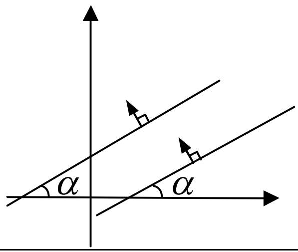
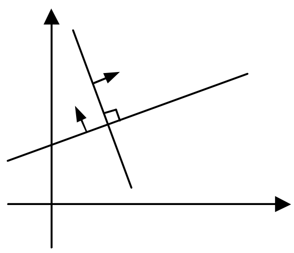
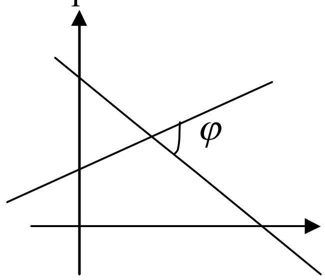
Метод координат

Основные задачи	Поясняющий рисунок	Расчетная формула
Расстояние между точками		$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Расстояние от точки до начала координат		$d_M = \sqrt{x^2 + y^2}$
Координаты точки, деля-щей отрезок в данном отно-шении λ		$M_1M = \lambda MM_2$ или $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$; $x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$
Координаты середины отрезка		$M_1M = MM_2,\ \lambda = 1$, $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$
Координаты центра тяже-сти треуголь-ника (C – точка пересе-чения медиан треугольника)		$x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

Уравнения прямой на плоскости

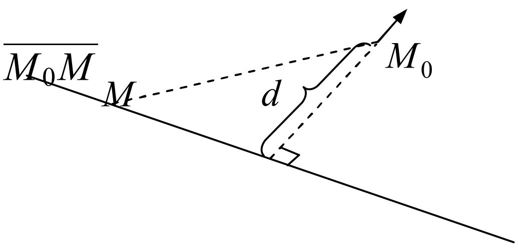
Название уравнения	Вид уравнения	Рисунок
Общее уравнение прямой	$Ax + By + C = 0$, где $\vec{n}(A, B)$ − нормаль к прямой, $A^2 + B^2 \neq 0$	
Уравнение прямой «в отрезках»	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	
Уравнение прямой с угловым коэффициентом k	$y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg}\alpha$	
Уравнения пучка прямых , проходящих через точку (x_0, y_0)	$y - y_0 = k(x - x_0)$	
Уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	
Нормальное уравнение прямой	$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$	

Взаимное расположение прямых

Расположение прямых	Условия расположения прямых по способу задания	
	$y = k_1x + b_1$ $y = k_2x + b_2$	$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $A_2x + B_2y + C_2 = 0$
Параллельность  	$k_1 = k_2$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$; если прямые совпадают, то $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
Перпендикулярность 	$k_1 \cdot k_2 = -1$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
Пересечение  	$\mathrm{tg}\varphi = \pm\left\|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right\|$	$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$ или $\cos\varphi = \frac{\left\|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}\right\|}{\left\|\vec{n_1}\right\| \cdot \left\|\vec{n_2}\right\|}$
Нахождение общих точек прямых	$\begin{cases} y = k_1x + b_1; \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$	$\begin{cases} A_1x + B_2y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$

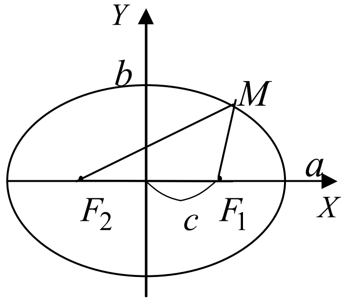
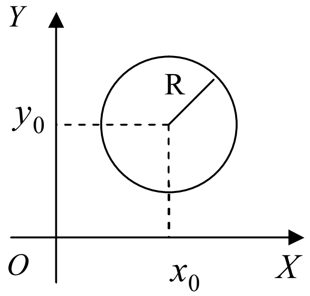
Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = np_{\bar{n}}\,\overline{M_0M}$$

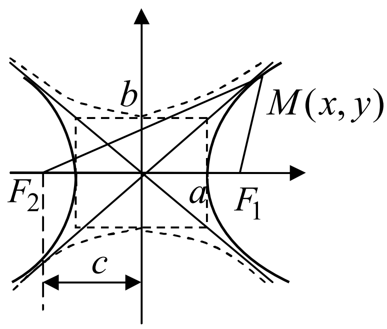
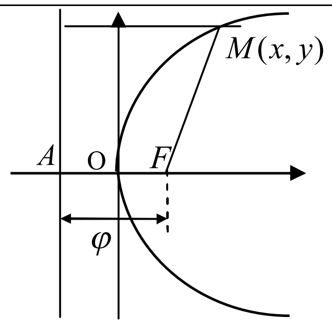


$$\Rightarrow d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Кривые второго порядка

Определение кривой	Рисунок	Уравнение
Эллипс – геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек (фокусов) F_1, F_2 есть величина постоянная (равная $2a$), большая чем расстояние между фокусами	 $F_1(c{,}0)$, $F_2(-c{,}0)$ – фокусы; c – половина расстояния между фокусами; M – произвольная точка эллипса, тогда $\|F_1M\|+\|F_2M\|=2a>2c$; $C(0{,}0)$ – центр эллипса	Каноническое уравнение: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$ где $a^2-c^2=b^2$; a – большая полуось, b – малая полуось. Уравнение эллипса со смещенным центром $C(x_0,y_0)$: $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$ $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ – эксцентриситет эллипса, характеризующий степень сжатия кривой, $0<\varepsilon<1$ Параметрические уравнения эллипса с центром C (0,0): $$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} 0\le t\le 2\pi$$
Окружность – частный случай эллипса $(a=b)$	 $C(x_0,y_0)$– центр окружности, R – радиус окружности	Каноническое уравнение: $x^2+y^2=R^2$, $C(0{,}0)$. Уравнение окружности со смещенным центром $C(x_0,y_0)$: $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$ Уравнение окружности в полярных координатах: 1) $C(0{,}0)\Rightarrow r=R$, 2) $C(R{,}0)\Rightarrow r=2R\cos\varphi$; 3) $C(0,R)\Rightarrow r=2R\sin\varphi$. Параметрические уравнения окружности с центром $C(0{,}0)$: $\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t, \end{cases} 0\le t\le 2\pi$

Окончание таблицы

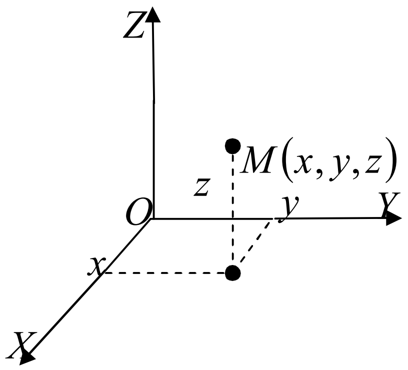
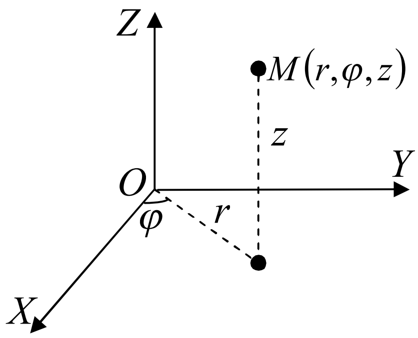
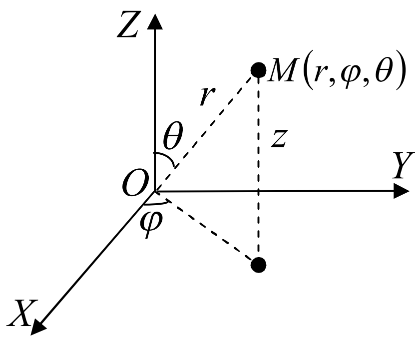
Гипербола – геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек (фокусов) F_1, F_2 есть величина постоянная (равная $2a$), меньшая, чем расстояние между фокусами	 $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ – фокусы; c – половина расстояния между фокусами; M – произвольная точка эллипса, тогда $\left\|\|F_1M\| - \|F_2M\|\right\| = 2a < 2c$	Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $c^2 - a^2 = b^2$; a – действительная полуось полуось, b – мнимая полуось. Каноническое уравнение сопряженной гиперболы (изображена на рис. штриховой линией): $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$ Уравнение гиперболы с центром в точке $C(x_0, y_0)$: $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$ Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$ Уравнения асимптот гиперболы: $y = \pm\frac{b}{a}x$
Парабола – геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до точки (фокуса) F равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой – директрисы	 $\|AF\| = p$ – параметр параболы, $F(\frac{p}{2};0)$ – фокус, тогда $\|MF\| = \|MN\|$, AN – директриса	Если $F(\frac{p}{2};0)$, то каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$; уравнение директрисы параболы: $x = -\frac{p}{2}$ Если $F(0;\frac{p}{2})$, то каноническое уравнение параболы: $x^2 = 2py$; уравнение директрисы параболы: $x = -\frac{p}{2}$

$\vec{a}$ φ

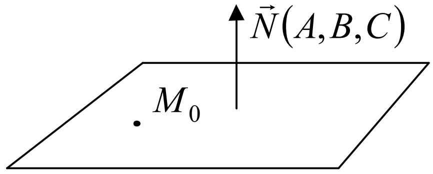
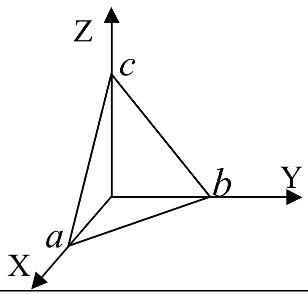
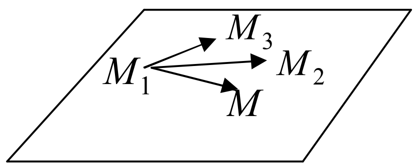
$np_{\vec{b}}\vec{a}$ $\vec{b}$

В ПРОСТРАНСТВЕ

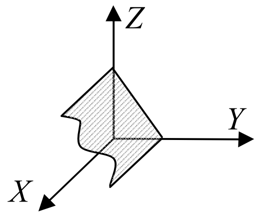
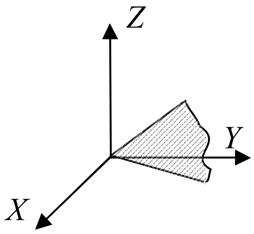
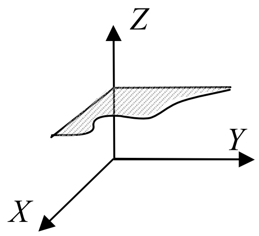
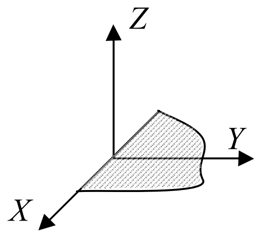
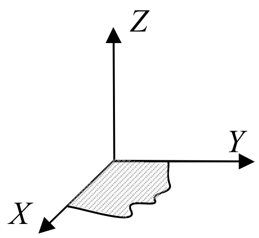
Системы координат в пространстве

Название системы и способ задания	Уравнения связи между координатами
Декартова (прямоугольная) система координат (ДСК)  O − начало координат; OX − ось абсцисс; OY − ось ординат; OZ − ось аппликат; (x, y, z) − координаты точки M	
Цилиндрическая система координат  r − длина радиуса-вектора проекции точки M на плоскость XOY ; φ − угол, образованный радиус-вектором проекции точки M с осью OX ; z − аппликата точки M ; (r,φ,z) − координаты точки M	$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$ $(r \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ z \in R)$
Сферическая система координат  O − начало координат; r − длина радиуса-вектора точки M ; φ − угол, образованный радиус-вектором проекции точки M с осью OX ; θ − угол отклонения радиуса-вектора $\overline{OM}$ от оси OZ ; (r,φ,θ) − координаты точки M	$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $(r \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi)$

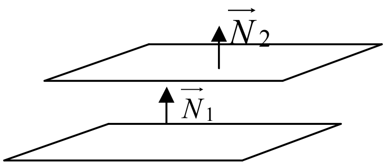
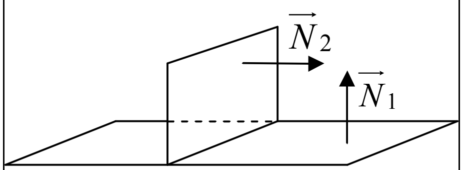
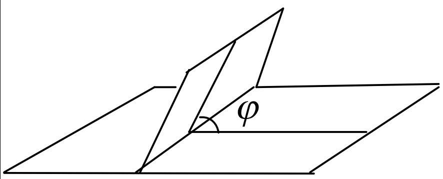
Уравнения плоскости

Способ задания	Вид уравнения
Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N} = \{A, B, C\}$. Вектор $\overrightarrow{N} = \{A, B, C\}$ – *нормальный вектор* плоскости	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 
Общее уравнение плоскости	$Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$
Уравнение плоскости «в отрезках»	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, где $a, b, c \neq 0$ 
Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ 
Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, параллельно вектору $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0$

Частные случаи положения плоскости в пространстве

Положение плоскости и вид общего уравнения	Поясняющий рисунок
Плоскость параллельна координатной оси OX: $By + Cz + D = 0$ ($A = 0$) OY: $Ax + Cz + D = 0$ ($B = 0$) OZ: $Ax + By + D = 0$ ($C = 0$)	 $By + Cz + D = 0$
Плоскость проходит через начало координат $Ax + By + Cz = 0$ ($D = 0$)	
Плоскость параллельна координатным осям OX и OY: $Cz + D = 0$ ($A = B = 0$) OX и OZ: $By + D = 0$ ($A = C = 0$) OY и OZ: $Ax + D = 0$ ($B = C = 0$)	 $Cz + D = 0$
Плоскость проходит через ось OX: $By + Cz = 0$ ($A = D = 0$) OY: $Ax + Cz = 0$ ($B = D = 0$) OZ: $Ax + By = 0$ ($C = D = 0$)	 $By + Cz = 0$
Уравнения координатных плоскостей XOY: $z = 0$ ($A = B = D = 0$) XOZ: $y = 0$ ($A = C = D = 0$) YOZ: $x = 0$ ($B = C = D = 0$)	 $z = 0$

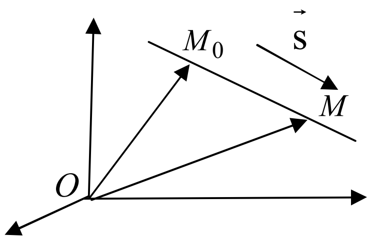
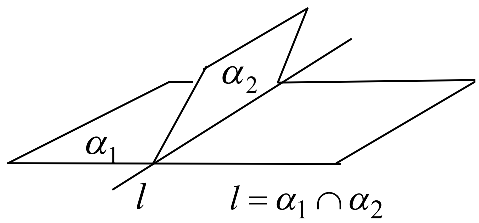
Взаимное расположение плоскостей

Расположение плоскостей	Условия расположения плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$
Параллельность  	$\vec{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\vec{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$ $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$. В частности, если плоскости совпадают, то $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.
Перпендикулярность  	$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Rightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
Пересечение под углом φ  	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\neq 0$ $\cos\varphi=\pm\dfrac{\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2}{\lvert\overline{N}_1\rvert\cdot\lvert\overline{N}_2\rvert}=$ $\pm\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

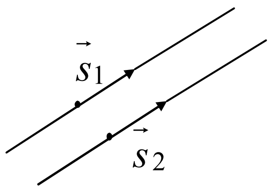
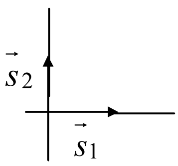
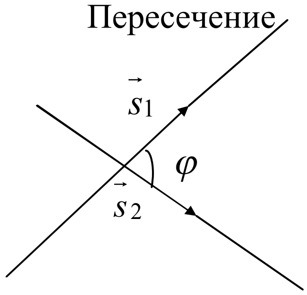
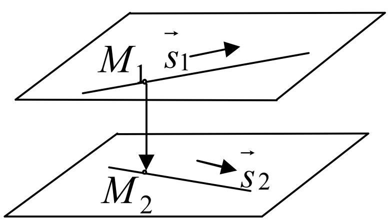
Расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

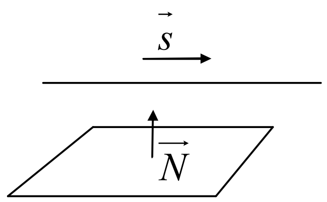
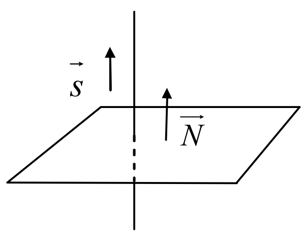
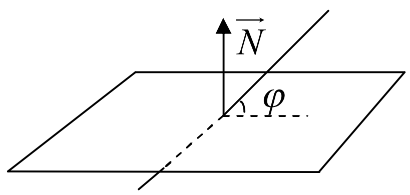
Уравнения прямой в пространстве

Способ задания прямой	Вид уравнения
Векторное уравнение прямой, проходящей через точку M параллельно заданному вектору $\vec{s}$.  $\vec{s}$ – направляющий вектор прямой $\vec{s} \parallel \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s}$, где t – скалярный множитель (параметр)	$\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{s}$
Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельно вектору $\vec{s} = \{m, n, p\}$	$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$
Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) параллельно вектору $\vec{s} = \{m, n, p\}$	$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$
Прямая как линия пересечения двух непараллельных плоскостей (*общие уравнения* прямой)  	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$ где $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \neq 0$
Уравнение прямой *через две точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Расположение прямых в пространстве	Условия расположения прямых: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$; $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$
Параллельность 	$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$
Перпендикулярность 	$\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
Пересечение 	$\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left\lvert\overrightarrow{S_1}\right\rvert\left\lvert\overrightarrow{S_2}\right\rvert}=\dfrac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$
Скрещивание 	$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ $\left(\overline{M_1M_2},\vec{s}_1,\vec{s}_2\right)\neq 0$ $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0$

Взаимное расположение прямой и плоскости

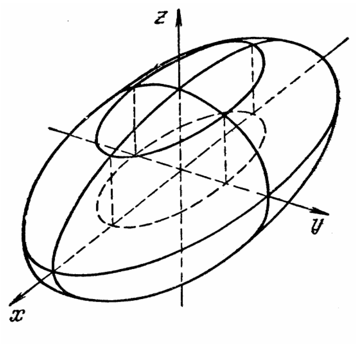
Расположение прямой и плоскости	Условия расположения прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$
Параллельность 	$\vec{N}\perp\vec{s}\ \Rightarrow\ \vec{N}\cdot\vec{s}=0\ \Rightarrow$ $Am+Bn+Cp=0$
Перпендикулярность 	$\vec{N}\times\vec{s}=0\Rightarrow\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$
Пересечение 	$\sin\varphi=\dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$
Условие принадлежности прямой плоскости	$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$
Точка пересечения прямой с плоскостью	$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$ Если прямая и плоскость не параллельны, то находят значение параметра t и затем определяют искомые координаты

Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая в декартовой системе координат уравнением второй степени относительно текущих координат x, y и z.

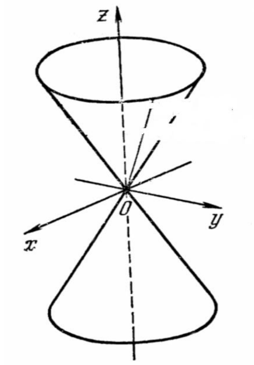
Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$



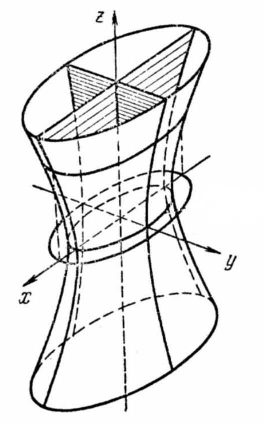
Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$



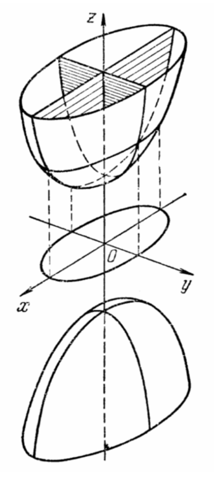
Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



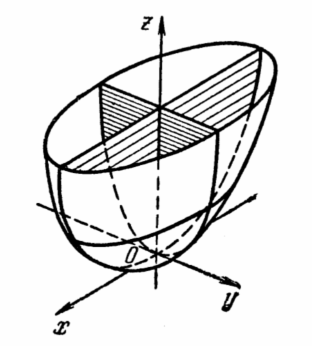
Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



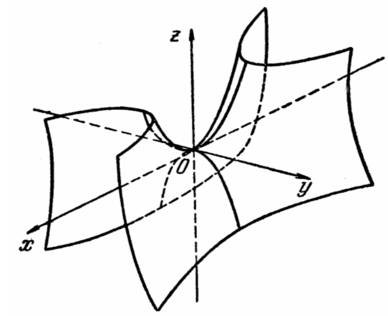
Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z\,.$$



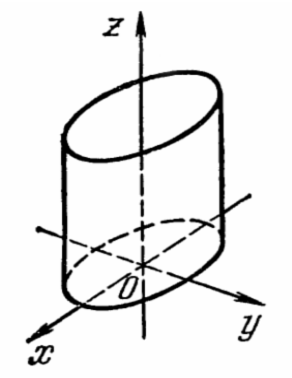
Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\,.$$



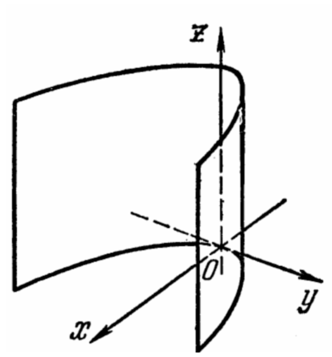
Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$



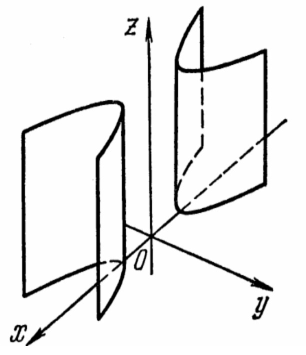
Параболический цилиндр

$$y^2=2px\,.$$



Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$



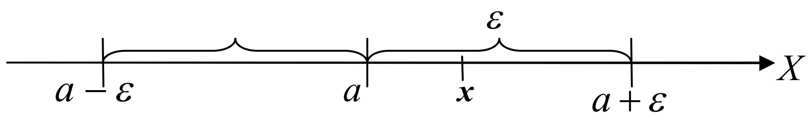
Раздел 8. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Числовые множества

$N = \{1,2,3,...\}$ – множество натуральных чисел; $Z = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,...\}$ – множество целых чисел; $Q = \left\{\dfrac{m}{n}\right\}$ – множество рациональных чисел, где $m \in Z, n \in N$; $R = \{X\}$– множество действительных чисел (множество всех конечных и бесконечных десятичных дробей), где $-\infty < X < \infty$.

$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \ge 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}$ – абсолютная величина действительного числа *x* (модуль числа *x*). $|x-a|$ означает расстояние между точками x и a.

ε– окрестность точки a есть интервал вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ задает радиус окрестности. Если $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (или $x \in O_\varepsilon(a)$), то $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$ (или $|x-a| < \varepsilon$).

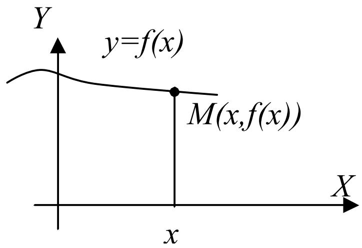


Функция, способы ее задания и свойства

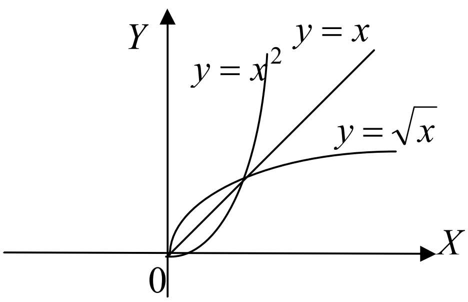
Если каждому элементу множества X $(x \in X)$ ставится в соответствие вполне определенный элемент y $(y \in Y)$, то говорят, что на множестве *X* задана функция $y = f(x)$. Переменная *x* – независимая переменная или аргумент. Множество X – область определения функции ($D(f)$), множество Y – область значений функции ($E(f)$).

<table>
<tr><th>Способы задания функции</th><th>Определение</th><th>П р и м е р</th></tr>
<tr><td>Аналитический</td><td>В виде формулы</td><td>$y = \lg(x+3)$,
$D(f) = \{x : x > -3\}$</td></tr>
<tr><td>Табличный</td><td><table><tr><td>x</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>…</td><td>x_n</td></tr><tr><td>y</td><td>y_1</td><td>y_2</td><td>…</td><td>y_n</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>…</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>9</td><td>…</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

Окончание таблицы

Графический	В виде графика – множества точек (x, y) плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента *x*, а ординаты – соответствующие им значения функции $y = f(x)$	

Пусть для $\forall x_1, x_2 \in D(f) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда для $\forall y \in E(f)\ \exists$ одно значение $x = g(y) \in D(f) : y = f(x)$. Функция $x = f^{-1}(y) = g(y)$, определенная на $E(f)$, называется *обратной* для функции $y = f(x)$.



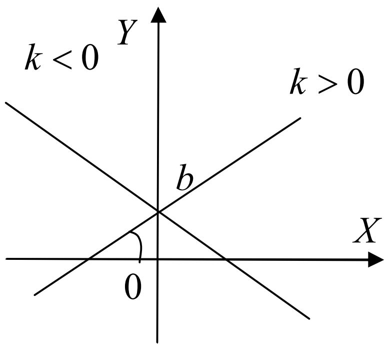
Обозначим аргумент обратной функции через *x,* а функцию через y: $y = g(x)$. Графики взаимно-обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

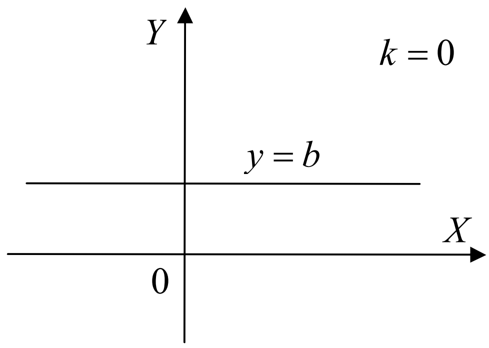
П р и м е р. $y = x^2$ имеет обратную функцию $y = \sqrt{x}$ при $x \geq 0$.

Свойства	Определение
Четность	Если $\forall\ x \in X \Rightarrow f(-x) = f(x)$, то $f(x)$ *четная* и ее график симметричен относительно оси *OY*, если $f(-x) = -f(x)$, то $f(x)$ *нечетная* и ее график симметричен относительно *O*(0,0)
Монотонность	Если $\forall\ x_1 > x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) (f(x_1) < f(x_2))$, то $f(x)$ *строго возрастает (строго убывает)* на *X*
Ограниченность	Если $\exists\ M > 0$: $\forall\ x \in X \Rightarrow \lvert f(x) \rvert \leq M$, то $f(x)$ *ограничена* на *X.*
Периодичность	Если $\forall\ x \in X \Rightarrow f(x + T) = f(x)$, то $f(x)$ *периодическая* с периодом *T*

Графики основных элементарных функций

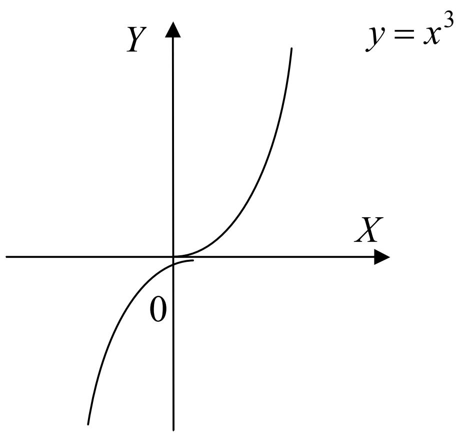
Линейная функция $y = kx + b$

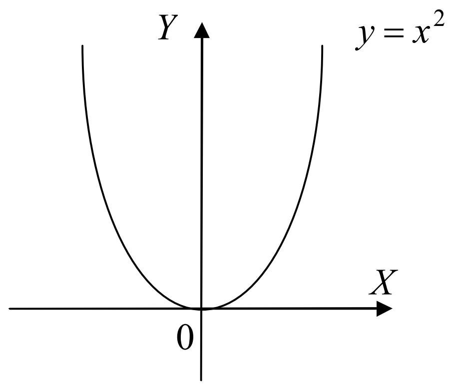




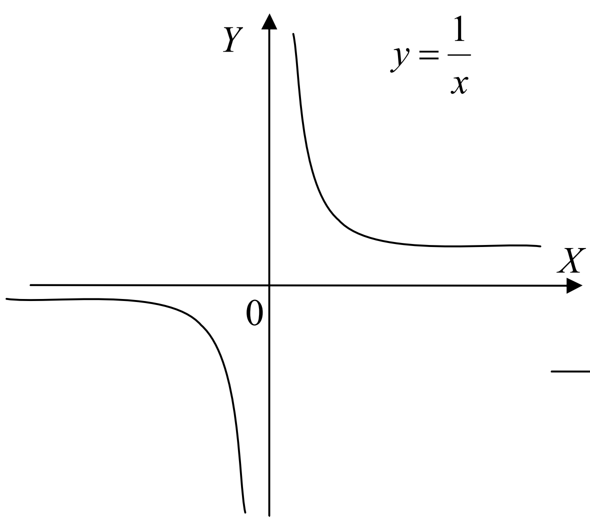
Степенная функция $y = x^n$

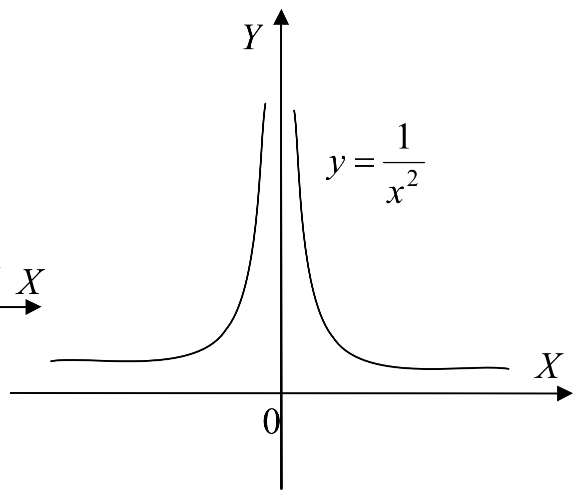
а) n – натуральное число



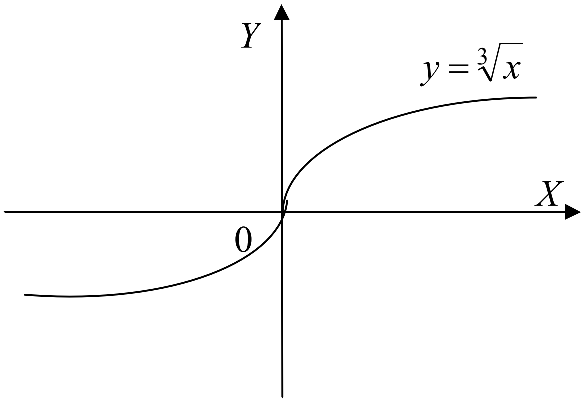


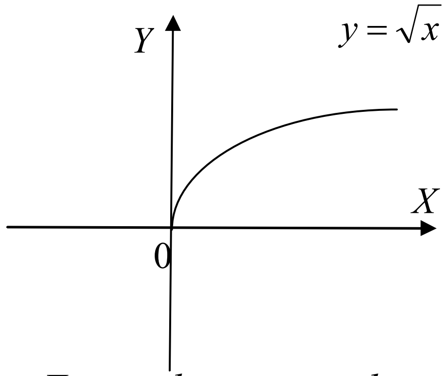
б) n – целое отрицательное число



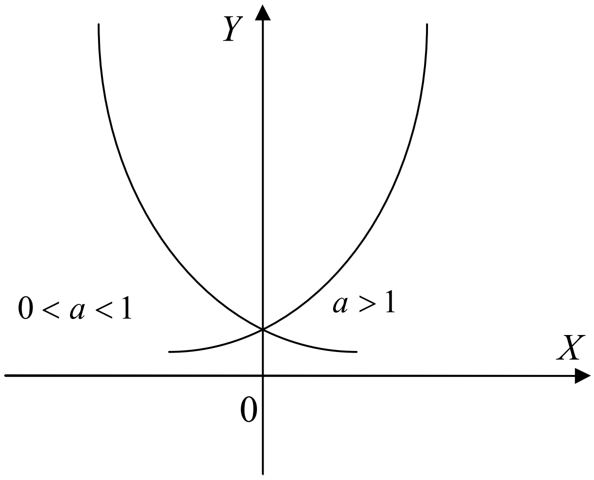


в) дробно-рациональные значения *n*

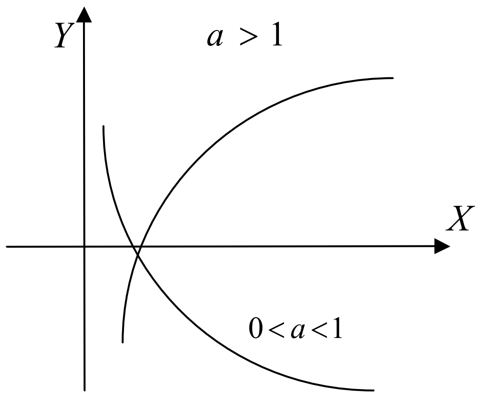




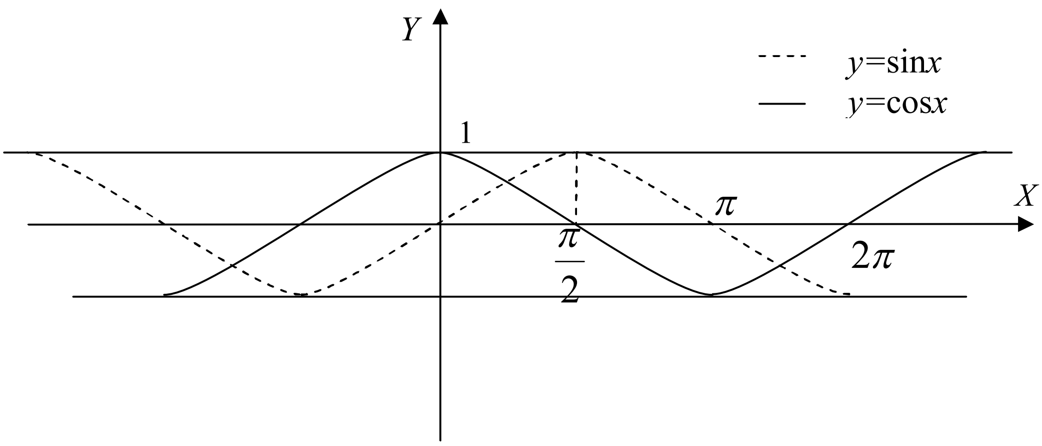
Показательная функция
$y = a^x$

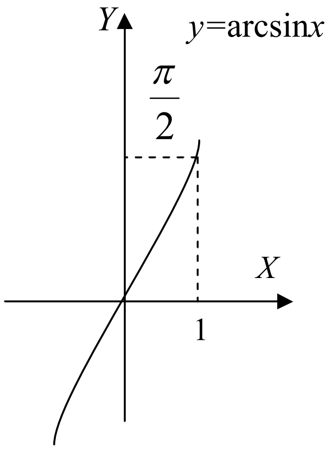


Логарифмическая функция
$y = \log_a x$

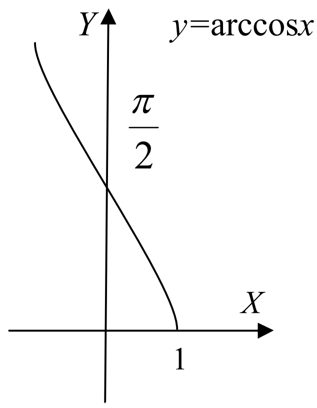


Тригонометрические функции и обратные к ним функции

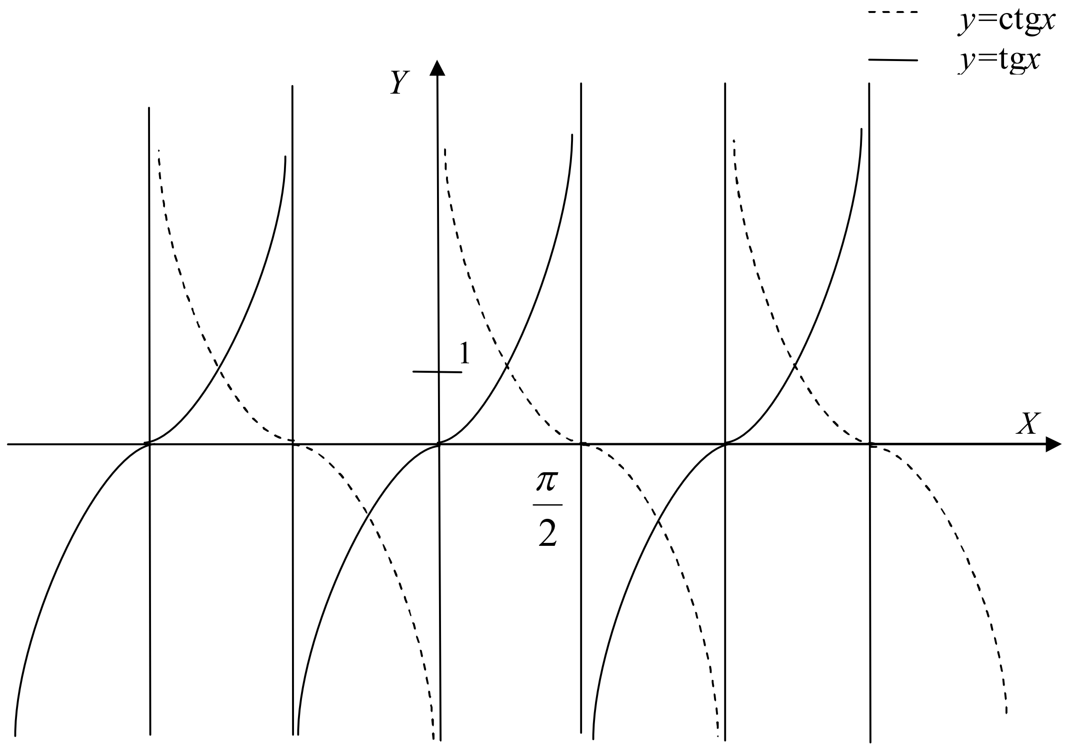




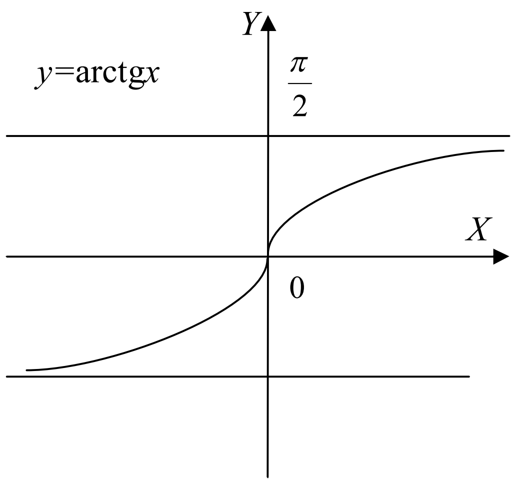
Y
y=arcsinx
π/2
X
1



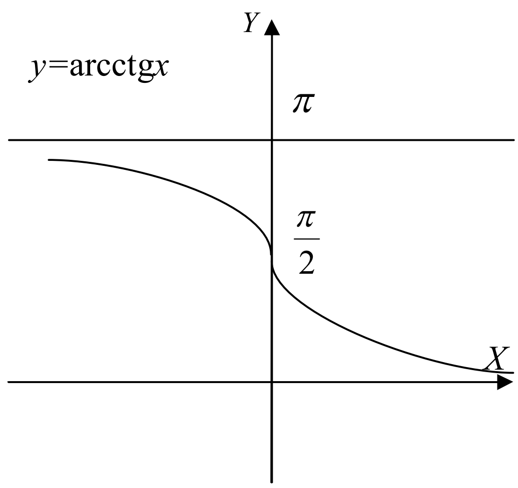
Y
y=arccosx
π/2
X
1



y=ctgx
y=tgx
Y
1
X
π/2

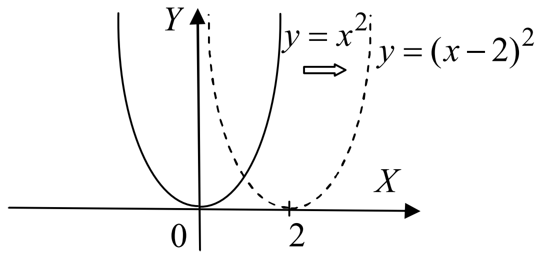
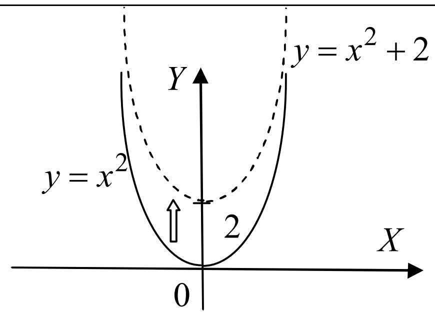
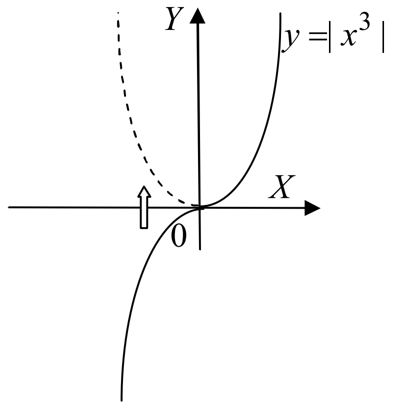
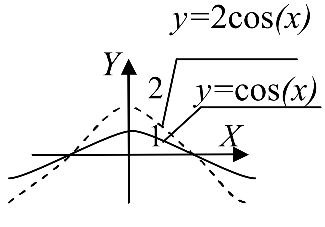
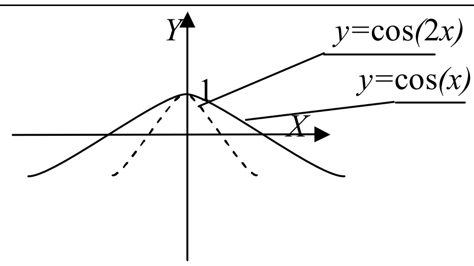


Y
y=arctgx
π/2
X
0



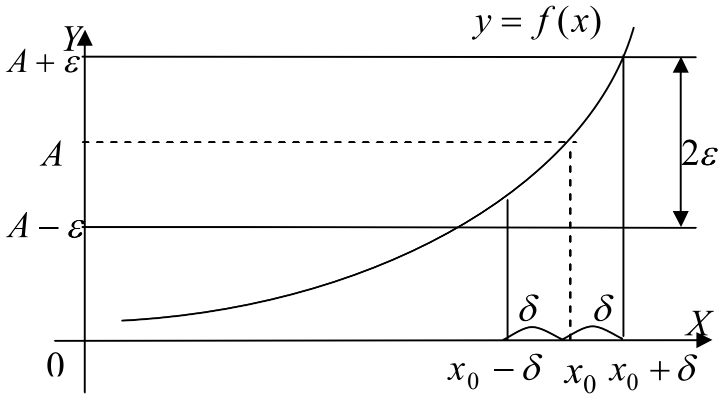
Y
y=arcctgx
π
π/2
X

Правила построения графиков функций сдвигами и деформациями графиков известных функций

Правила построения	П р и м е р
$y = f(x+a)$ – сдвиг графика $y = f(x)$ на $\lvert a\rvert$ единиц вдоль оси OX (вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$)	
$y = f(x) + b$ – сдвиг графика $y = f(x)$ на $\lvert b\rvert$ единиц вдоль оси OY (вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$)	
$y = \lvert f(x)\rvert$ – зеркальное отражение графика $y = f(x)$ от оси OX для $x < 0$	
$y = kf(x)$ – растяжение (сжатие) графика $y = f(x)$ вдоль оси OY в k раз ($\frac{1}{k}$ раз)при $k > 1$ (при $0 < k < 1$)	
$y = f(mx)$ – сжатие (растяжение) графика по оси OX в m раз ($1/m$ раз) при $m > 1$ (при $0 < m < 1$)	

Предел функции

Число A есть *предел функции* $f(x)$ *в точке* x_0



$A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon$
$\forall x \neq x_0 : |x - x_0| <$
$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

$A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ *(* $A = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$*)* – *левый (правый)* предел функции $f(x)$ в точке x_0 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ $\forall x \neq x_0$*:* $x_0 - \delta < x < x_0$ *(*$x_0 < x < x_0 + \delta$*)* $\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Правила вычисления пределов

Операции над пределами	Замечательные пределы
$\lim\limits_{x \to x_0} (cf(x)) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, где c=const	*Первый замечательный предел*: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	
$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	*Второй замечательный предел:* $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (1 форма); $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (2 форма).
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, где $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$	

$\alpha(x)$ – *бесконечно малая функция* в точке $x = x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$; $g(x)$ – *бесконечно большая функция* в точке $x = x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty(-\infty)$. Тогда $\frac{1}{\alpha(x)} = g(x)$ $(\frac{1}{0} = \infty)$, $\frac{1}{g(x)} = \alpha(x)$ $(\frac{1}{\infty} = 0)$.

Виды определенностей	Виды неопределенностей

$\frac{1}{\infty}=0;\ \frac{1}{0}=\infty;\ \frac{c}{0}=\infty;\ \frac{c}{\infty}=0;\ 0\cdot 0=0;$ $\frac{0}{\infty}=0;\ 0^{+\infty}=0;\ \infty\cdot\infty=\infty;\ \frac{\infty}{0}=\infty$	$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty;\ \infty-\infty;$ $1^{\infty};\ 0^{0};\ \infty^{0}$

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые $(\alpha\sim\beta)$ при $x\to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=1$.

Основные эквивалентности при $x\to 0$*:* $\sin x\sim x$*;* $\operatorname{tg} x\sim x$*;* $\arcsin x\sim x$*;* $\operatorname{arctg} x\sim x$*;* $a^x-1\sim x\ln a$*;* $\ln(1+x)\sim x$*;* $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$.

Вид функции $f(x)$	Неопределенность	Рекомендации к раскрытию неопределенностей
$f(x)=\frac{P_n}{Q_m}=$ $=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}$	$\frac{\infty}{\infty}$	Разделить числитель и знаменатель на высшую степень x. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}0, \text{ если } n<m;\\ \frac{a_n}{b_m}, \text{ если } n=m;\\ \infty, \text{ если } n>m\end{cases}$
	$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}$. Сократить дробь на разность $(x-x_0)$
$f(x)$ содержит иррациональности: 1-й случай: $f(x)=\sqrt{u_1(x)}-\sqrt{u_2(x)}$; 2-й случай: $f(x)=\sqrt[3]{u_1(x)}\pm\sqrt[3]{u_2(x)}$	$\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$	1-й случай. Умножить и разделить функцию на сопряженное иррациональное выражение $\sqrt{u_1(x)}+\sqrt{u_2(x)}$ и воспользоваться формулой $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. 2-й случай. Умножить и разделить функцию на неполный квадрат разности (суммы) и воспользоваться формулами сокращенного умножения $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$
$f(x)$ содержит тригонометрические функции и обратные к ним функции	$\frac{0}{0}$	Воспользоваться первым замечательным пределом или эквивалентностями
$f(x)$ содержит разность алгебраических дробей	$\infty-\infty$	Привести дроби к общему знаменателю
$f(x)$ содержит произведение бесконечно малой функции на бесконечно большую функцию	$0\cdot\infty$	Убрать один из множителей в знаменатель как обратную величину: $0\cdot\infty=\frac{\infty}{1/0}=\frac{\infty}{\infty}$ или $0\cdot\infty=\frac{0}{1/\infty}=\frac{0}{0}$

$f(x)=g(x)^{\varphi(x)}$ – показательно-степенная функция	1^{∞}	Воспользоваться одной из форм второго замечательного предела
	0^0 ∞^0	Воспользоваться основным логарифмическим тождеством $B=e^{\ln B}$

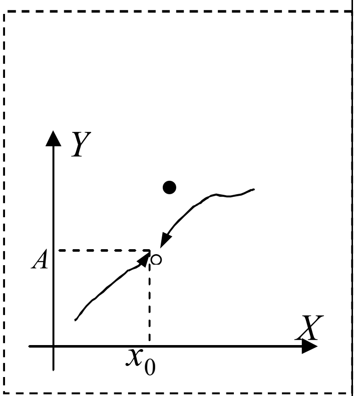
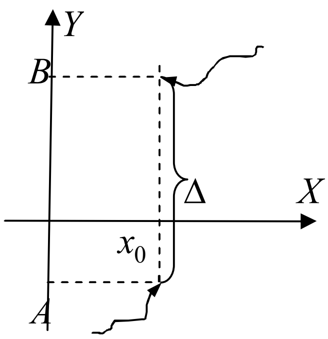
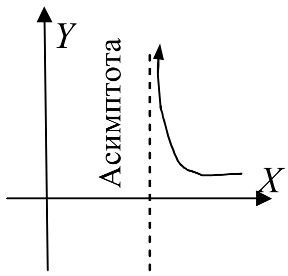
Непрерывность функции

Первое определение. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 слева (справа), если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$).

Критерий непрерывности. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Второе определение. Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x+\Delta x)-f(x))=0$.

Типы разрывов в точке x_0		
1род		2 род
Устранимый	*Неустранимый*	*Бесконечный*
		
$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, однако $A\neq f(x_0)$. В частности, функция может быть не определена в точке x_0	$\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=B$, $A\neq B$. $\Delta=\lvert A-B\rvert$ – величина скачка функции	По крайней мере, один из односторонних пределов в точке $x=x_0$ ($\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)$) не существует или бесконечен

Всякая *элементарная функция* (т.е. составленная из основных элементарных функций с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, деления, умножения и операции взятия функции от функции) непрерывна в каждой точке, в которой она определена

Раздел 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

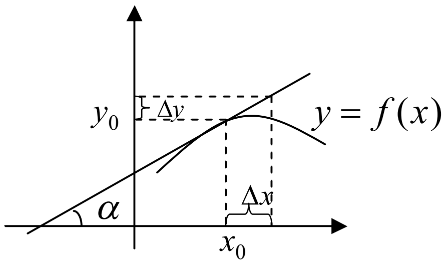
Понятие производной

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$y'_+(x_0) = f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - \textit{правая}\ \text{производная}$$

$$y'_-(x_0) = f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - \textit{левая}\ \text{производная}$$

Критерий $\exists$ *производной:* $y'(x_0) = A \Leftrightarrow y'_-(x_0) = y'_+(x_0) = A$.



Геометрический смысл производной: $y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ − уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$.

Механический смысл производной: $s'(t) = v(t)$, $v'(t) = a(t)$, где $s(t)$ −пройденный путь; $v(t)$ − скорость; $a(t)$ − ускорение.

Основные правила дифференцирования

1) $C' = 0, \quad C - \mathrm{const}$;

2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $u(x), v(x)$ − дифференцируемые функции;

3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, $(C \cdot u)' = C \cdot u'$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;

5) дифференцирование сложной функции: если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то $y'_x = f'_u \cdot u'_x$;

6) дифференцирование обратной функции: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

П р и м е р. $y = \ln\left(x^3 - 3x^2\right)$.

$y = \ln u$, $u = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = (\ln u)'_u \cdot u'_x = \dfrac{1}{u} \cdot \left(x^3 - 3x^2\right)' = \dfrac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2}$.

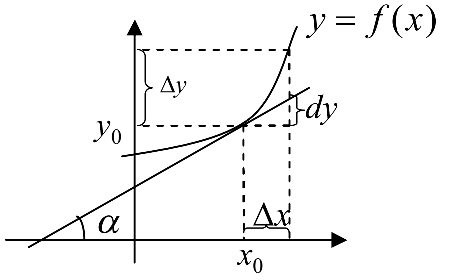
Таблица производных

$\left(x^n\right)' = nx^{n-1},\ (x)' = 1$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}\cdot u'$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{tg}u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{ctg}u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arctg}u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$
$(\mathrm{sh}\, x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\, x$	$(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$
$(\mathrm{ch}\, x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\, x$	$(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$
$(\mathrm{th}\, x)' = \left(\dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$(\mathrm{th}\, u)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u}\cdot u'$

Дифференцирование различных функций

Способ задания функции	Вид функции	Формула для дифференцирования
Неявный	$F(x,y)=0$	$y'=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$
Параметрические уравнения	$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$	$y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t},\ y''_{xx}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$
Показательно-степенная функция	$y=u(x)^{v(x)}$	Логарифмическая производная: $(\ln y)'=\left(\ln u(x)^{v(x)}\right)'\Rightarrow\dfrac{y'}{y}=(v(x)\ln u(x))'$

Дифференциал функции



Приращение функции $y=f(x)$:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x;y).$$

Функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x, если $\Delta y=A\Delta x+\alpha\Delta x$, где $\alpha=\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Дифференциал функции – главная часть приращения: $dy=A\Delta x=f'(x)dx$.

При $\Delta x\to 0$, $\Delta y\approx dy\ \Rightarrow f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$ – формула для приближённых вычислений.

Свойства дифференциала

$d(c)=0$; $d(u\pm v)=du\pm dv$; $d(u\cdot v)=du\cdot v+u\cdot dv$; $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{du\cdot v-u\cdot dv}{v^2}$;

инвариантность формы дифференциала: если $y=f(\varphi(x))$, $u=\varphi(x)$– промежуточный аргумент, то $dy=y'_x dx=y'_u u'_x dx=y'_u du$.

П р и м е р. $d(\cos x^2)=\left(\cos x^2\right)'_x dx=-\sin(x^2)dx^2=-\sin u du$.

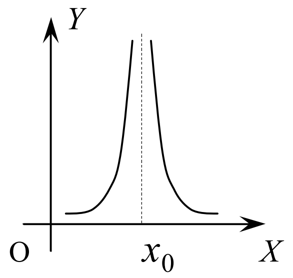
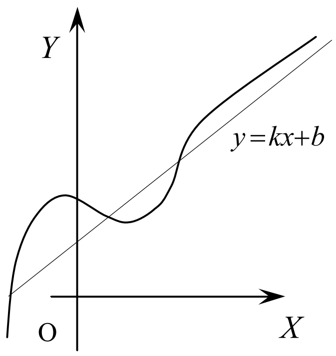
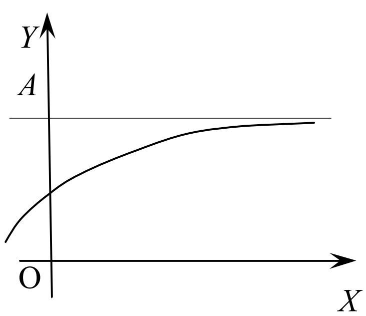
Правило Лопиталя

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},\ \text{если}\ \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \text{существует.}$$

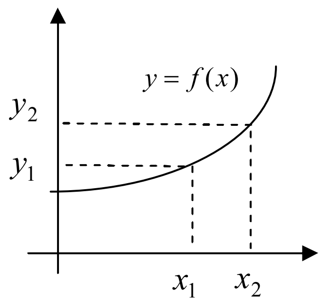
П р и м е р. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$.

Исследование функций и построение графиков

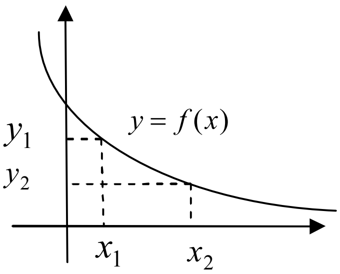
Исследование графика функции на наличие асимптот

Название	Уравнение	П р и м е р
Вертикальная асимптота 	$x = x_0$, где точка $x = x_0$ – точка бесконечного разрыва	$y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \infty$ $\Rightarrow x = 2$ – вертикальная асимптота
Наклонная асимптота 	$y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - kx \right]$	$y = \dfrac{x^2}{x-1}$ $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - x \right) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow y = x$ – наклонная асимптота
Горизонтальная асимптота 	$y = A$, где $A = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ($k = 0$)	$y = \operatorname{arctg} x$ $\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$ $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ – односторонние горизонтальные асимптоты

Исследование функции на монотонность

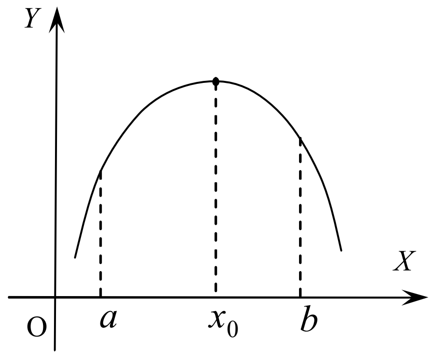


$y = f(x)$ – *возрастающая* функция на (a,b), если $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$ и $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
$\forall\, x \in (a,b): f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает на (a,b).

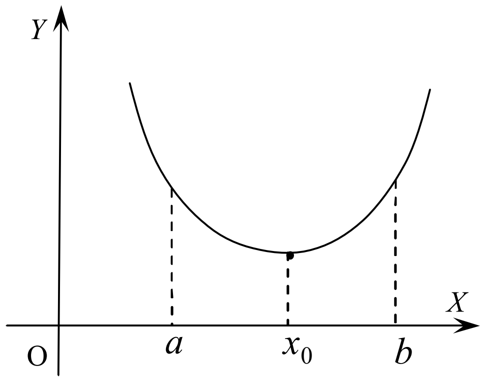


$y = f(x)$ – *убывающая* функция на (a,b), если $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$ и $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
$\forall\, x \in (a,b): f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает на (a,b).

Исследование функции на экстремум



x_0 – точка локального максимума, если $f(x) < f(x_0)\ \forall x \in [a,b]$.



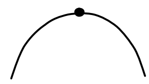
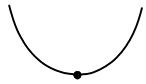
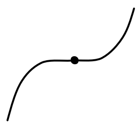
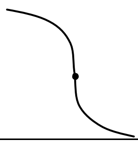
x_0 – точка локального минимума, если $f(x) > f(x_0)\ \forall x \in [a,b]$.

Необходимое условие существования экстремума

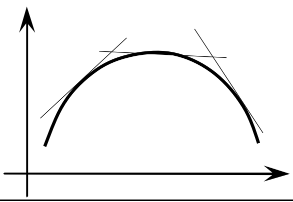
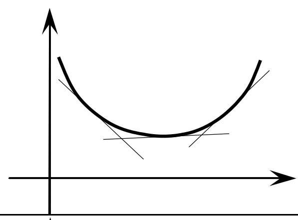
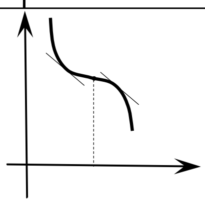
Если $x = x_0$ – точка локального экстремума, то в этой точке производная функции либо равна нулю ($f'(x_0) = 0$), либо не существует.

Достаточные условия существования экстремума

Пусть $x_0 \in D(f)$ – критическая точка I рода, т.е. в этой точке $f'(x_0)=0$ или не существует.

Знак производной $f'(x)$ в окрестности точки x_0		Вид графика в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$	Вывод
$x < x_0$	$x > x_0$		
$+$	$-$		$x = x_0$ – точка максимума
$-$	$+$		$x = x_0$ – точка минимума
$+$	$+$		$x = x_0$ – не является точкой экстремума, функция возрастает
$-$	$-$		$x = x_0$ – не является точкой экстремума, функция убывает

Исследование кривой на вогнутость, выпуклость и точки перегиба

Поясняющий рисунок	Определение
	*Выпуклая* кривая расположена ниже любой касательной, проведенной к кривой в любой точке промежутка
	*Вогнутая* кривая расположена выше любой касательной, проведенной к кривой в любой точке промежутка
	*Точка перегиба* отделяет участок выпуклости от вогнутости

Необходимое условие существования точки перегиба

Если $x = x_0$ − точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Достаточные условия существования точки перегиба

Пусть $x_0 \in D(f)$ – критическая точка II рода, т.е. в этой точке $f''(x_0) = 0$ или не существует.

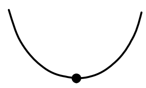
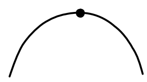
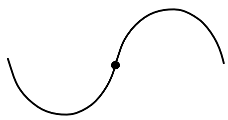
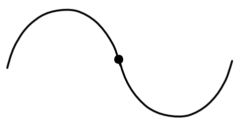
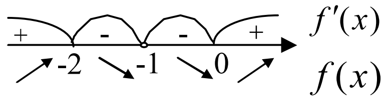
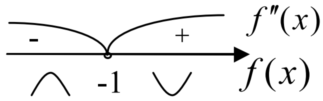
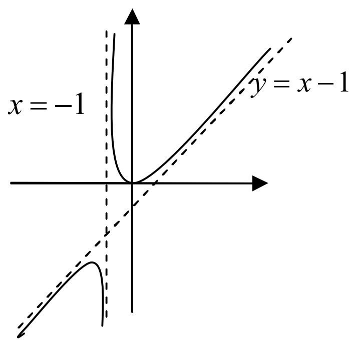
Знак производной $f''(x)$ в окрестности точки x_0		Вид графика в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$	Вывод
$x < x_0$	$x < x_0$		
+	+		Кривая вогнутая, точки перегиба нет
–	–		Кривая выпуклая, точки перегиба нет
+	–		$(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба
–	+		$(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба

Схема исследования функции

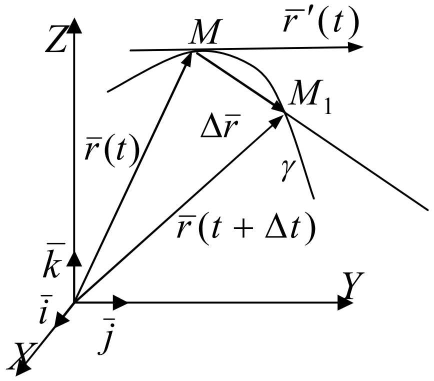
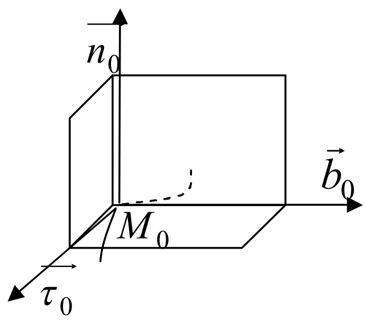
Этапы исследования	П р и м е р. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$
1. Найти область определения	$D(y) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
2. Исследовать функцию на чётность, нечётность и периодичность	$y(-x) = \dfrac{x^2}{-x+1} \neq \pm y(x)$ Функция общего вида, непериодическая
3. Найти точки пересечения графика с осями координат	$x = 0 \Rightarrow y = 0$

Окончание таблицы

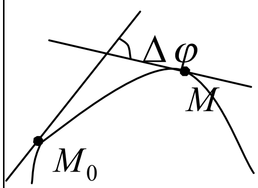
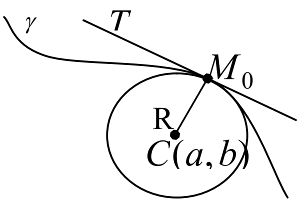
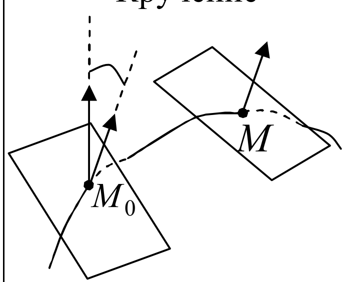
4. Найти асимптоты графика функции	$\lim\limits_{x\to -1\pm 0} \dfrac{x^2}{x+1} = \pm\infty \Rightarrow$ $x=-1$ − вертикальная асимптота; $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \pm\infty \Rightarrow$ горизонтальных асимптот нет; $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x(x+1)} = 1,$ $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - x \right) = -1 \Rightarrow$ $y = x - 1$ − наклонная асимптота
5. Найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции	$y' = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2},\ y' = 0$ при $x=-2,\ x=0$.  $y_{\max} = y(-2) = -4,\ y_{\min} = y(0) = 0$
6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции	$y'' = \dfrac{2}{(x+1)^3},\ y'' \neq 0 \Rightarrow$ точек перегиба нет.  $(-\infty,-1)$ − интервал выпуклости, $(-1,+\infty)$ − интервал вогнутости
7. Построить график функции	

Раздел 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Векторная функция скалярного аргумента

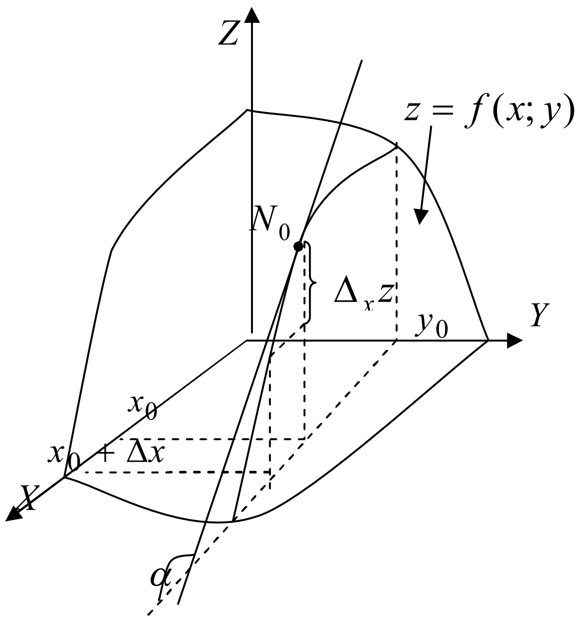
Основные понятия	Определения и расчетные формулы
Способы задания пространственной кривой γ 	Векторное уравнение кривой γ – $\vec{r}=\vec{r}(t)$, параметрические уравнения кривой γ – $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ где t – параметр, каждому значению которого соответствует определенная точка M в пространстве
Векторная функция скалярного аргумента t.	$\vec{r}=x(t)i+y(t)j+z(t)k$
Годограф	Линия γ, описываемая концом радиуса-вектора $\vec{r}(t)$
Производная вектора-функции скалярного аргумента	$\vec{r}'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=x'(t)i+y'(t)j+z'(t)k$
Вектор скорости	$\vec{r}'(t)$ характеризует направление и быстроту движения точки, направлен по касательной к кривой γ в точке M
Вектор ускорения	$\vec{r}''(t)=\left(\vec{r}'(t)\right)'=x''(t)i+y''(t)j+z''(t)k$
Репер Френе 	Система координат $\left\{M_0, \dfrac{\vec{\tau}_0}{\lvert\vec{\tau}_0\rvert}, \dfrac{\vec{n}_0}{\lvert\vec{n}_0\rvert}, \dfrac{\vec{b}_0}{\lvert\vec{b}_0\rvert}\right\}$, где $\vec{\tau}_0=\vec{r}'(t)$ – касательный вектор; $\vec{b}_0=\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)$ – вектор бинормали; $\vec{n}_0=\vec{\tau}_0\times\vec{b}_0$ – вектор главной нормали

Числовые характеристики кривой

Характеристики	Определение	Расчетные формулы
Кривизна кривой 	*Кривизна кривой* – скорость отклонения кривой от касательной: $k_1 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta S}$, где $\Delta\varphi$ – наименьший угол между касательными к кривой в точках *M* и M_0, ΔS – длина дуги MM_0.	$k_1 = \dfrac{\lvert f''(x)\rvert}{\left(\sqrt{1+(f'(x))^2}\right)^3}$ – для плоской кривой $k_1 = \dfrac{\lvert \overline{r'} \times \overline{r''}\rvert}{\lvert \overline{r'}\rvert^3}$ – для пространственной кривой
Радиус кривизны, центр кривизны, эволюта и эвольвента 	*Радиус кривизны линии в точке* – величина, обратная кривизне кривой в рассматриваемой точке. Пусть в точке M_0 проведена нормаль к кривой, направленная в сторону вогнутости кривой. Если отложить на ней отрезок M_0C, равный радиусу кривизны *R*, то точка *C* – *центр кривизны в точке* M_0. *Эволюта* кривой γ – множество центров ее кривизны. *Эвольвента* кривой γ – кривая, для которой кривая γ является эволютой.	Для плоской кривой $R = \dfrac{1}{k_1} = \dfrac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{\lvert y''\rvert}$ – радиус кривизны, $a = x \pm \dfrac{y'(1+y'^2)}{\lvert y''\rvert}$, $b = y \mp \dfrac{1+y'^2}{\lvert y''\rvert}$ – координаты центра кривизны
Кручение 	*Кручение кривой в точке* – скорость отклонения кривой от соприкасающейся плоскости: $k_2 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta S}$, где $\Delta\varphi$ – наименьший угол между соприкасающимися плоскостями, ΔS – длина дуги	$k_2 = \dfrac{\left(r'(t), r''(t), r'''(t)\right)}{\left(r'(t) \times r''(t)\right)^2}$

Раздел 11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные функции и их нахождение

Понятия	Формула	Поясняющий рисунок
Частные прираще-ния по x и по y	$\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) -$ $- f(x; y)$; $\Delta_y z = f(x; y+\Delta y) -$ $- f(x; y)$	
Частная производ-ная по x	$z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$	
Частная производ-ная по y	$z'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$	
Геометриче ский смысл частных производ-ных	$z'_x(x_0; y_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол между осью OX и касательной, проведенной к кривой $z = f(x; y_0)$ в точке N_0	
Частные производ-ные высших порядков	$\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial z}{\partial y}) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}$; $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial z}{\partial x}) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}$; $\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial z}{\partial x}) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}$; $\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial z}{\partial y}) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}$; $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = z'''_{xxy}$ Если частные производные 2-го порядка непрерывны, то $z''_{xy} = z''_{yx}$	**П р и м е р** Для функции $z = (x^2 - 2xy + \dfrac{x}{y})$: $z'_x = [\,y = \text{const}\,] = 2x - 2y + \dfrac{1}{y}$; $z'_y = [\,x = \text{const}\,] = 0 - 2x - \dfrac{x}{y^2}$; $z''_{xx} = 2 - 0 + 0$; $z''_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$; $z''_{xy} = z''_{yx} = -2 - \dfrac{1}{y^2}$

Дифференцирование различных функций

Способ задания функции	Вид функции	Формула для дифференцирования
Неявно заданная функция	$F(x, y, z) = 0$	$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$
Сложная функция, для которой $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$	$z = f(x(t); y(t))$	Полная производная $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$
Сложная функция, для которой $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$	$z = f(x(u; v), y(u; v))$	$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$; $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$

Дифференциал и его приложения

Полное приращение функции $z = f(x; y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x; y)$, если $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Полный дифференциал функции – главная часть приращения, линейная относительно Δx и Δy: $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

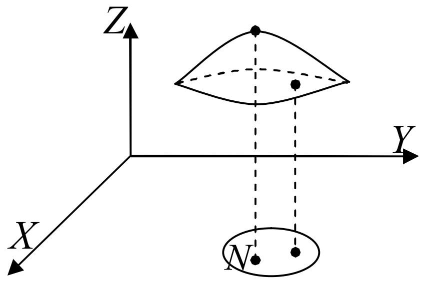
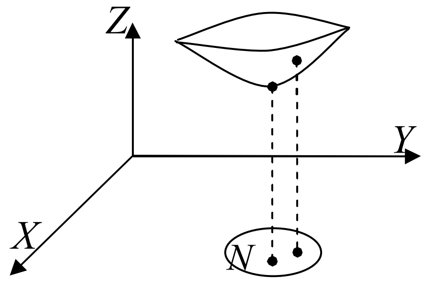
Для дифференцируемой функции в точке *полный дифференциал:*

$$dz = z'_x(x; y)\Delta x + z'_y(x; y)\Delta y \text{, где } \frac{\partial z}{\partial x} = A, \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Приложения дифференциала	Формула
Формула для приближенных вычислений	$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$
Уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0)	$z - f(x_0; y_0) = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0)$
Уравнение нормали в точке (x_0, y_0)	$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$

Исследование функции двух переменных на экстремум

Пусть N – точка локального экстремума (максимума или минимума), $O_\delta(N)$ − δ-окрестность точки N.

<table>
<tr><td>N – точка локального максимума, если
$\forall\ (x;y) \in O_\delta(N) \Rightarrow f(x;y) \le f(N)$</td><td>$N$ – точка локального минимума, если
$\forall\ (x;y) \in O_\delta(N) \Rightarrow f(x;y) \ge f(N)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Необходимое условие существования экстремума
Если точка N – точка экстремума дифференцируемой функции
$z = f(x,y)$, то $f'_x(N) = 0$; $f'_y(N) = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Достаточные условия существования экстремума

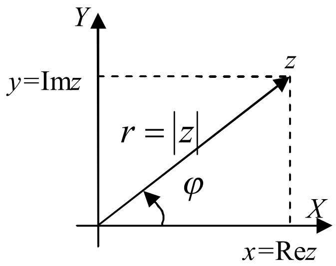
Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(N) & f''_{xy}(N) \\ f''_{xy}(N) & f''_{yy}(N) \end{vmatrix}$.
Если $\Delta > 0$, $f''_{xx}(N) < 0$, то N – точка локального максимума.
Если $\Delta > 0$, $f''_{xx}(N) > 0$, то N – точка локального минимума.
Если $\Delta < 0$, то N не является точкой локального экстремума.
Если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования в окрестности точки N</td></tr>
</table>

Замечание. Нахождение *наибольшего M и наименьшего m значений* дифференцируемой в замкнутой области D функции $z = f(x;y)$:

1) найти критические точки функции, принадлежащие D и вычислить значения в них;
2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе D;
3) сравнить полученные значения и выбрать среди них M и m.

Раздел 12. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Понятие комплексного числа

Основные понятия	Формула
Определение комплексного числа	$z = x + iy$ – комплексное число, где $x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть z, $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть z, i – мнимая единица, удовлетворяющая условию: $i^2 = -1$
Равенство комплексных чисел	$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2;\ y_1 = y_2.$
Комплексно сопряженное число	$\bar{z} = x - iy$ $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in R$
Изображение комплексного числа	
Модуль комплексного числа	$r = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \|z\| \geq 0$
Аргумент комплексного числа (*главное значение аргумента*)	$\varphi = \arg z\ ;\quad -\pi < \arg z \leq \pi$ $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\|z\|}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\|z\|}, \end{cases}$ $\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если} \quad x < 0, \quad y > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если} \quad x < 0, \quad y < 0 \end{cases}$
Множество значений аргумента	$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k, \quad k \in Z$

Формы записи и операции над комплексными числами

Формы / Операции	Алгебраическая $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$	Тригонометрическая $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$ $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$	Показательная $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$
Сложение	$z_1 \pm z_2 = \left(x_1 \pm x_2\right) + i\left(y_1 \pm y_2\right)$	–	–
Умножение	$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$	$z_1 z_2 = r_1 r_2 (cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$	$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Деление	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Возведение в степень	–	$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$	$z^n = r^n e^{n\varphi}$
Извлечение корня	–	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$ $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$	–

Основная теорема алгебры

Формулировка теоремы	П р и м е р
Любое уравнение типа $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$ имеет ровно n корней (действительных или комплексных).	Решить уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$. Р е ш е н и е. $D = 4 - 4\cdot 5 = -16 < 0$. Имеем комплексно-сопряженные корни : $x_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

Иллюстративные примеры

Необходимая операция	Решение примеров
Сложение	$(2-3i)+(-5+4i)=(2-5)+i(-3+4)=-3+i$
Умножение	$(2-3i)\cdot(-5+4i)=-10+8i+15i-12i^2=$ $=-10+23i+12=2+23i$
Деление	$\dfrac{2-3i}{-5+4i}=\dfrac{(2-3i)(-5-4i)}{(-5+4i)(-5-4i)}=\dfrac{-10-8i+15i-12}{25+16}=$ $\dfrac{-22+7i}{41}=-\dfrac{22}{41}+\dfrac{7}{41}i$
Возведение в степень	$z=\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^{60}$ $r=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2,\quad \varphi=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\pi=-\dfrac{\pi}{3}+\pi=\dfrac{2}{3}\pi,$ $z=-1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right).$ $\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^{60}=2^{60}\left(\cos\left(60\cdot\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(60\cdot\dfrac{2}{3}\pi\right)\right)$ $=2^{60}(\cos 40\pi+i\sin 40\pi)=2^{60}$
Извлечение корня	Решить уравнение $z^4+1=0$. Р е ш е н и е $z=\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{(\cos\pi+i\sin\pi)}=\cos\dfrac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2\pi k}{4}$. При $k=0$ имеем $z_1=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; при $k=1$ имеем $z_2=\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; при $k=2$ имеем $z_3=\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; при $k=3$ имеем $z_4=\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$. На комплексной плоскости корни расположены в вершинах квадрата, вписанного в окружность единичного радиуса.

Раздел 13. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Неопределённый интеграл и его свойства

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$; C − произвольная постоянная; $F(x)+C$ − семейство первообразных.

1. $\int dF(x) = F(x) + C$;
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;
4. $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
5. *Инвариантность формулы интегрирования*: $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ − произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Таблица простейших интегралов

$\int 0dx = C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int dx = x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, (a \neq 0)$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C, (a \neq 0)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$

Методы интегрирования

Метод интегрирования	П р и м е р
1. Непосредственное интегрирование – интегрирование с использованием свойств неопределенного интеграла и тождественных преобразований над $f(x)$	$\int \frac{2x^2+4}{x}dx = \int 2xdx + 4\int \frac{1}{x}dx =$ $= x^2 + 4\ln\lvert x\rvert + C$
2. *Замена переменной* *1 случай* $\int f(x)dx = \begin{vmatrix} \textit{Замена} \\ x=\varphi(t) \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ *2 случай (подведение под знак дифференциала)* $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} \textit{Замена} \\ t=\varphi(x) \end{vmatrix} = \int f(t)dt$ *Формулы для наиболее часто встречающихся дифференциалов* $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$; $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x}$; $\cos xdx = d\sin x$; $\sin xdx = -d\cos x$ $e^x dx = de^x$; $xdx = \frac{1}{2}dx^2$; $\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$; $\frac{1}{x}dx = d\ln x$; $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d\,\mathrm{tg}x$	$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \begin{vmatrix} 1+\sqrt{x}=t \\ x=(t-1)^2 \\ dx=2(t-1)dt \end{vmatrix} = 2\int \frac{(t-1)dt}{t}$ $= 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t} = 2t - 2\ln t + C =$ $= 2(1+\sqrt{x}) - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$ $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x(\ln x)' dx = \int \ln x d(\ln x)$ $= \lvert \ln x = t \rvert = \int tdt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} + C$ *Почти табличные интегралы:* $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) =$ $= \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ $\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+1)}{3x+1} = \frac{1}{3}\ln\lvert 3x+1\rvert + C$
3. *Интегрирование по частям* $\int udv = uv - \int vdu$ *Рекомендации по использованию метода* $\int \underbrace{P_n}_{u} \to \underbrace{\cos kxdx,\ \sin kxdx,\ a^{kx}dx}_{dv}$ $\int \underbrace{\arccos x,\ \arcsin x,\ \mathrm{arctg}x,\ \log_a x}_{u} \to \underbrace{P_n dx}_{dv}$	$\int (x+5)\sin 2xdx = \begin{vmatrix} u=x+5 \\ du=dx \\ dv=\sin 2xdx \\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix} =$ $= -\frac{1}{2}(x+5)\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2xdx =$ $= -\frac{1}{2}(x+5)\cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos 2xd(2x) =$ $= -\frac{1}{2}(x+5) + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

Интегрирование различных функций

Интегрирование рациональных дробей

Основные понятия	Формулы
Многочлен	$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ − многочлен степени n, простейшая рациональная функция
Рациональная дробь	$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ − отношение многочленов
Виды рациональных дробей	$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ правильная, если $n<m$ и неправильная, если $n\geq m$
Представление неправильной рациональной дроби	С помощью деления числителя на знаменатель приводится к виду: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M(x)+\dfrac{r(x)}{Q_m(x)}$, где $M(x)$ − многочлен (целая часть при делении); $r(x)$ − остаток от деления
Типы простейших рациональных дробей	**I.** $\dfrac{A}{(x-a)}$; **II.** $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n\neq1$; **III.** $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)}$; **IV.** $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, $n\neq1$ x^2+px+q − не имеет действительных корней
Интегрирование простейших дробей	$\int\dfrac{A}{x-a}dx=A\ln\lvert x-a\rvert+C$; $\int\dfrac{A}{(x-a)^n}dx=-\dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{A}{(x-a)^{n-1}}+C$; При интегрировании дробей III и IV типов пользуются подстановкой $x+\dfrac{p}{2}=t$, приводящей знаменатель $x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$ к виду t^2+k^2, где $k^2=q-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$. *Формула приведения* $\int\dfrac{dx}{\left(x^2+k^2\right)^n}=\dfrac{1}{2(n-1)k^2}\left[\dfrac{x}{\left(x^2+k^2\right)^{n-1}}+(2n-3)\int\dfrac{dx}{\left(x^2+k^2\right)^{n-1}}\right]$

Правило разложения дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n<m$) на сумму простейших дробей. Если $Q_m(x)=(x-a)\cdot(x-b)^k\cdot(x^2+px+q)\cdot(x^2+gx+l)^s$, то каждому сомножителю соответствует сумма простейших дробей вида:

$$\boxed{(x-a)} \longrightarrow \boxed{\frac{A}{x-a}}$$

$$\boxed{(x-b)^k} \longrightarrow \boxed{\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\frac{B_3}{(x-b)^3}+\ldots+\frac{B_k}{(x-b)^k}}$$

$$\boxed{x^2+px+q} \longrightarrow \boxed{\frac{Mx+N}{x^2+px+q}}$$

$$\boxed{(x^2+gx+l)^s} \longrightarrow \boxed{\frac{M_1x+N_1}{x^2+gx+l}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+gx+l)^s}}$$

Схема вычисления	Пример
$I=\int\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, где $n<m$	$I=\int\dfrac{x^2+x+13}{(x-1)^2(x^2+4)}$
Разложить дробь на простейшие	$\dfrac{x^2+x+13}{(x-1)^2(x^2+4)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$
Найти *методом неопределенных коэффициентов* коэффициенты разложения: 1) привести дробь в правой части к общему знаменателю; 2) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x	1) $x^2+x+13=A(x-1)(x^2+4)+B(x^2+4)+$ $+(Cx+D)(x-1)^2=x^3(A+C)+x^2(-A+B+D-2C)+$ $+x(4A+C-2D)+x^0(-4A+4B+D)$; 2) $\left.\begin{array}{r}A+C=0,\\ -A+B+D-2C=1,\\ 4A+C-2D=1,\\ -4A+4B+D=13\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A=-\dfrac{3}{5};\ B=3;\\ C=\dfrac{3}{5};\ D=-\dfrac{7}{5}\end{array}\right.$
Проинтегрировать простейшие дроби	$I=\int(-\dfrac{3}{5(x-1)}+\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{3/5x-7/5}{x^2+4})dx=$ $-\dfrac{3}{5}\ln\lvert x-1\rvert-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{10}\ln\lvert x^2+4\rvert-\dfrac{7}{10}arctg\,\dfrac{x}{2}+C$

Интегралы от тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$.

Случай	Подстановка	Пример
n – нечётное	$t=\cos x$	$\int \sin^3 x \cos^2 x dx =$ $= \int \left(1-\cos^2 x\right)\sin x \cos^2 x dx =$ $= -\int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x d\cos x =$ $= \int \left(\cos^4 x - \cos^2 x\right) d\cos x =$ $= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$
m – нечётное	$t=\sin x$	
n и m – чётные неотрицательные числа	$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$	$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int \left(1+\cos 2x\right)dx =$ $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
n и m – либо оба чётные, либо оба нечётные, причём хотя бы один из них отрицателен	$t = \mathrm{tg} x$ (или $t = \mathrm{ctg} x$)	$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} =$ $= \int \mathrm{tg}^2 x\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)d\left(\mathrm{tg} x\right) =$ $= \int \left(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x\right)d(\mathrm{tg} x) =$ $= \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} + C$

2. Интегралы вида $\int R\left(\sin x, \cos x\right)dx$, где R – рациональная функция. Используется *универсальная подстановка*: $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, где $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

П р и м е р. $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \left| t = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2)(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2})} =$

$$= \int \frac{dt}{t^2+t+2} = \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{1+2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C \cdot$$

3. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$ интегрируются на основании тригонометрических формул:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right],$$

$$\cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x.$$

Интегрирование иррациональных функций

Случай	Подстановка
$\int R\left(x, \sqrt[n]{x^m}, \sqrt[q]{x^p}, ..., \sqrt[g]{x^s}\right)dx$	$x = t^k$, где k − наименьшее общее кратное показателей корней, т.е. чисел $n, q, ..., g$
$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$	$ax + b = t^n$
$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$
$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$	$x = a\sin t \quad (x = a\cos t)$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$	$x = a\,\mathrm{tg}\,t \quad (x = a\,\mathrm{ctg}\,t)$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$	$x = a/\cos t \quad (x = a/\sin t)$
$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$	Подстановки Эйлера: 1) $a > 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$
	2) $c > 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$
	3) x_1, x_2 − действительные корни уравнения $ax^2+bx+c = 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = (x - x_1)t$
Биноминальные выражения $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$	p − целое число $\Rightarrow x = t^q$, q − общий знаменатель дробей m и n
	$\frac{m+1}{n}$ − целое число $\Rightarrow a + bx^n = t^r$, r − знаменатель дроби p
	$\frac{m+1}{n} + p$ − целое число $\Rightarrow a \cdot x^{-n} + b = t^r$, r − знаменатель дроби p

Определённый интеграл, его свойства и вычисление

Определение
Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Разобьём отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i и обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину каждого такого отрезка. *Интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется сумма вида $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n$. *Определённым интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральной суммы при $\Delta x_i \to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части, ни от выбора точек ξ_i в них. Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где x − переменная интегрирования, a и b − *нижний* и *верхний* пределы интегрирования. *Теорема существования определённого интеграла:* Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на нем.

Свойства	
Аддитивность по области интегрирования	$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$
Аддитивность по функции	$\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$
Однородность	$\int\limits_a^b k\,f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$
Интегрирование неравенств	$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$
Теорема «о среднем»	$\exists c \in [a;b]: \int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$
Перестановка пределов интегрирования	$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$
Производная от интеграла с переменным верхним пределом интегрирования	$\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right)' = f(x)$

Методы вычисления определенного интеграла

Название метода	Формула	П р и м е р
Формула Ньютона–Лейбница	$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^b =$ $F(b) - F(a);$ где $F'(x) = f(x)$	$\int\limits_e^{e^2} \frac{\ln x dx}{x} = \int\limits_e^{e^2} \ln x d(\ln x) = \frac{(\ln x)^2}{2}\Bigg\vert_e^{e^2} =$ $= \frac{(\ln e^2)^2}{2} - \frac{(\ln e)^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
Интегрирование по частям	$\int\limits_a^b udv = uv\Big\vert_a^b - \int\limits_a^b vdu$	$\int\limits_0^{\pi} x\cos x dx = x\sin x \vert_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin x dx =$ $= \pi \sin \pi + \cos x \vert_0^{\pi} = \cos \pi - \cos 0 = -2$
Интегрирование подстановкой	$\int\limits_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(\beta) = b \end{bmatrix} =$ $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$	$\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \left\vert \begin{matrix} t^2 = x+1 \\ 2tdt = dx \\ x = 3 \Rightarrow t = 2 \\ x = 8 \Rightarrow t = 3 \end{matrix} \right\vert = \int\limits_2^3 \frac{t^2-1}{t} 2tdt =$ $= 2\int\limits_2^3 \left(t^2 - 1\right)dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_2^3 = 10\frac{2}{3}$

Несобственные интегралы

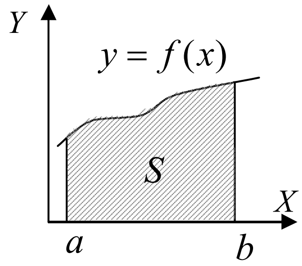
I род *Интеграл с бесконечным пределом*	*II род* *Интеграл от функции, имеющей разрыв*
$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx,$ $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$	$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon\to0} \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$ где $x = c$ − точка разрыва II рода, $a < c < b$
Если предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл *расходится*. При наличии конечного предела говорят, что интеграл *сходится*.	
П р и м е р	
$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} =$ $\lim\limits_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1.$ Интеграл сходится.	$\int\limits_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_{\varepsilon}^4$ $= \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(-1 + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = +\infty.$ Интеграл расходится

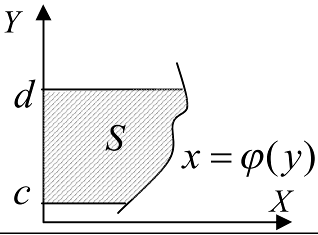
Геометрические приложения определённого интеграла

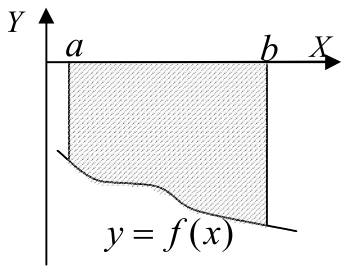
Площадь плоской области

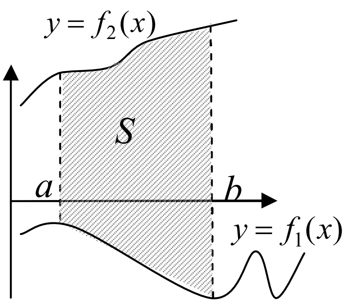
<table>
<tr><td colspan="2">Площадь криволинейной трапеции</td></tr>
<tr><td>1-й случай

$\forall x \in [a;b]: f(x) \ge 0 \Rightarrow$

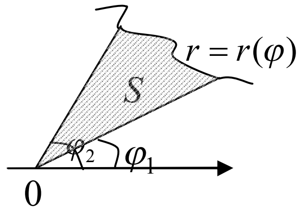
$S = \int\limits_a^b f(x)dx$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2-й случай
$\forall y \in [c;d]: \varphi(y) \ge 0 \Rightarrow$

$S = \int\limits_c^d \varphi(y)dy$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3-й случай
Кривая задана параметрическими уравнениями:
$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad y(t) \ge 0; \quad t \in [\alpha;\beta]$</td><td>$S = \int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Площадь плоской области в декартовых координатах</td></tr>
<tr><td>1-й случай

$\forall x \in [a;b]: f(x) \le 0 \Rightarrow$
$S = \int\limits_a^b |f(x)|dx$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2-й случай

$\forall x \in [a;b]; f_2(x) \le f_1(x) \Rightarrow$
$S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$</td><td>
</td></tr>
</table>

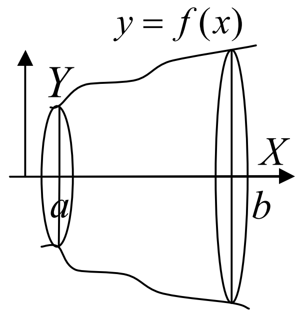
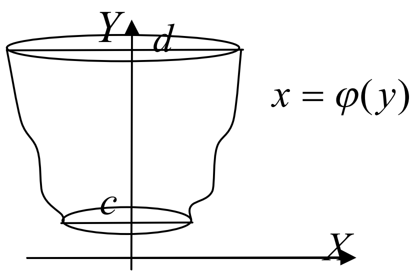
Окончание таблицы

<table>
<tr><th colspan="2">Площадь криволинейного сектора в полярных координатах</th></tr>
<tr><td>$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$</td><td>
</td></tr>
</table>

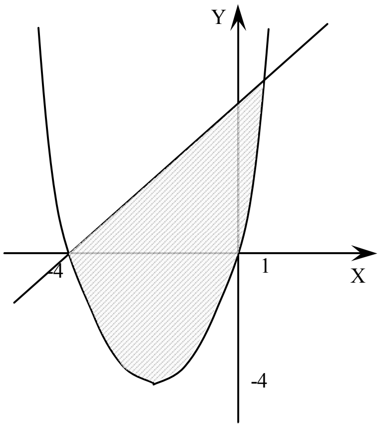
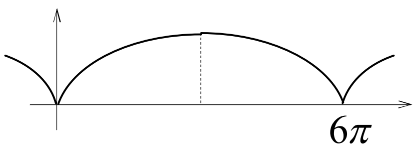
Длина дуги кривой

Способ задания кривой	Формула
$y=f(x)$	$l=\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$
$r=r(\varphi)$	$l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2+r'^2}d\varphi$
$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad t\in[\alpha;\beta]$	$l=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$

Объемы и площади тел вращения

<table>
<tr><td>Вращение криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$ и $x=b$ вокруг
оси OX: $V_{OX}=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$,
оси OY: $V_{OY}=2\pi\int\limits_a^b x f(x)dx$.
$S_{OX}=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Вращение криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x=\varphi(y)$, осью ординат и прямыми $y=c$ и $y=d$ вокруг
оси $OУ$: $V_{OY}=\pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)dy$</td><td>
</td></tr>
</table>

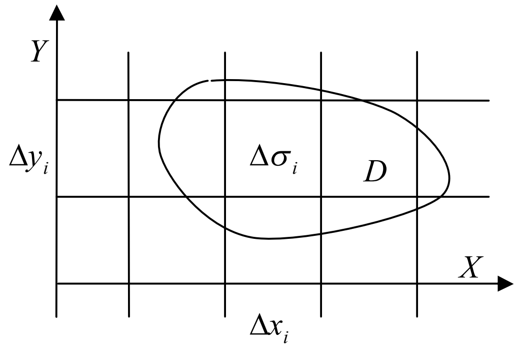
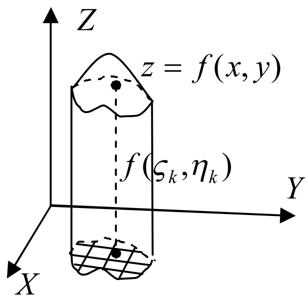
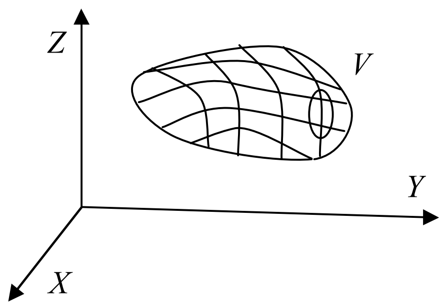
Примеры задач на геометрические приложения определенного интеграла

<table>
<tr><th>Условие задачи</th><th>Решение</th></tr>
<tr><td>Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями: $y = x^2 + 4x$, $x - y + 4 = 0$.

</td>
<td>Найдём абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решаем систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4. \end{cases}$ Откуда находим
$x_1 = -4$, $x_2 = 1$.
$S = \int\limits_{-4}^{1} \left[(x+4) - (x^2+4x) \right] dx =$
$= \left(4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-16 - 24 + \frac{64}{3}\right) = \frac{125}{6}$ (кв.ед.)</td></tr>
<tr><td>Найти длину дуги кривой
$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi$


Циклоида</td>
<td>Так как $x'(t) = 3(1 - \cos t)$,
$y'(t) = 3\sin t$, то
$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} =$
$= \sqrt{9(1 - \cos t)^2 + 9\sin^2 t} =$
$= 3\sqrt{2(1 - \cos t)} = 6\sin\frac{t}{2}.$
$l = 6\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -12\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = 12$ (ед.)</td></tr>
<tr><td>Вычислить объём тела, которое получается при вращении вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 4$, прямыми $x = 3$, $x = 12$ и осью абсцисс</td>
<td>$V_{OX} = \pi\int\limits_3^{12} \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi\int\limits_3^{12} \frac{dx}{x^2} = -16\pi \cdot \frac{1}{x}\Big|_3^{12} =$
$= 4\pi$ (куб.ед)</td></tr>
<tr><td>Найти площадь поверхности вращения вокруг оси OX дуги кубической параболы $y = x^3$ при $0 \le x \le \frac{1}{2}$</td>
<td>$y' = 3x^2$
$S_{OX} = 2\pi\int\limits_0^{1/2} x^3\sqrt{1 + 9x^4}\,dx = \frac{\pi}{27}(1 + 9x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{1/2} =$
$= \frac{\pi}{27}\left(\frac{125}{64} - 1\right) = \frac{61\pi}{1728}$ (кв.ед.)</td></tr>
</table>

Раздел 14. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Интегралы от скалярной функции

Определение и обозначение интеграла	Геометрический и физический смысл
Двойной интеграл от функции *f(x,y)* по плоской области (D): $$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k,\eta_k)\Delta\sigma_k,$$ где $\Delta\sigma_k\ (k=\overline{1,n})$ – площади участков, на которые разбита область D; δ – наибольший из диаметров участков; (ς_k,η_k) – произвольная точка на k-м участке; $d\sigma = dxdy$ – элемент площади 	Если $z = f(x,y)$ – уравнение поверхности, ограничивающей цилиндроид сверху, то $\iint_D f(x,y)dxdy = V$ – объем цилиндроида.  Если $\rho = \rho(x,y)$ – плотность неоднородной плоской пластины D, то $\iint_D \rho(x,y)dxdy = m_D$ – масса D
Тройной интеграл от функции *f(x,y,z)* по объему V: $$\iiint_V f(x,y,z)dv = \lim_{\sigma\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k,\eta_k,\xi_k)\Delta v_k,$$ где $\Delta v_k\ (k=\overline{1,n})$ – объемы элементарных областей; $(\varsigma_k,\eta_k,\xi_k)$ – произвольная точка на k-м элементарном объеме; $dv = dxdydz$ – элемент объема	Если $\rho = \rho(x,y,z)$ – плотность неоднородного тела V, то $\iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz = m_V$ – масса V.  $\iiint_V dxdydz = V$ – объем тела V

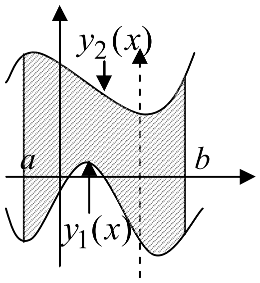
Свойства	Формула
Аддитивность по функции	$\iint\limits_D (f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$
Аддитивность по области интегрирования	$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$, если область $D = D_1 \cup D_2$
Однородность	$\iint\limits_D \alpha f(x,y)dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy$
Теорема о среднем	$\exists\ M_0(x_0, y_0) \in D : \iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0)S_D$, где S – площадь D
Интегрирование неравенств	$\forall (x;y) \in D : f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$
Оценка интеграла	$\forall (x,y) \in D : m \le f(x,y) \le M \Rightarrow mS \le \iint\limits_D f(x,y)dS \le MS$
Интеграл по модулю	$\left\vert \iint\limits_D f(x,y)dxdy \right\vert \le \iint\limits_D \vert f(x,y) \vert dxdy$

Замечание. Свойства двойного и тройного интегралов аналогичны.

Физические приложения двойных и тройных интегралов

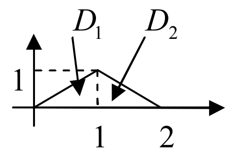
Приложения	Двойной интеграл	Тройной интеграл
Моменты инерции	$I_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x,y)dxdy$ $I_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x,y)dxdy$	$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 \rho(x,y,z)dxdydz$ $I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 \rho(x,y,z)dxdydz$ $I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 \rho(x,y,z)dxdydz$
Статические моменты	$M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy$ $M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy$	$M_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz$ $M_{xz} = \iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz$ $M_{yz} = \iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz$
Координаты центра тяжести	$x_c = \dfrac{M_y}{m_D}$; $y_c = \dfrac{M_x}{m_D}$	$x_c = \dfrac{M_{yz}}{m_V}$; $y_c = \dfrac{M_{xz}}{m_V}$; $z_c = \dfrac{M_{xy}}{m_V}$

Вычисление двойного интеграла

<table>
<tr><th>Расчетные формулы</th><th>П р и м е р ы</th></tr>
<tr><td colspan="2">Декартова система координат</td></tr>
<tr><td>


Если область D правильная в направлении оси OY (т.е. любая прямая, параллельная оси OY, пересекает границу области не более чем в двух точках), то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$
</td>
<td rowspan="2">
$\iint_D (x+2y)dxdy$, где D ограничена линиями: $y=0$, $y=x$, $x+y=2$.



Р е ш е н и е

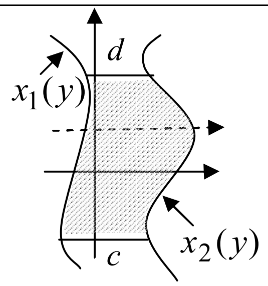
Область D правильная в направлении оси OX:

$$I=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x+2y)dx=$$

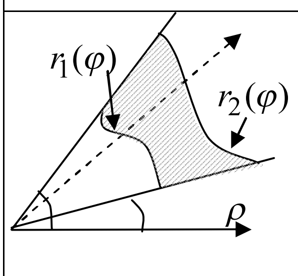
$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2+2xy\right)\Big|_y^{2-y}dy=\frac{5}{3}.$$

Область D сложная в направлении оси OY: $D=D_1\cup D_2$.

$$I=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x(x+2y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x}(x+2y)dy=\frac{5}{3}$$
</td></tr>
<tr><td>


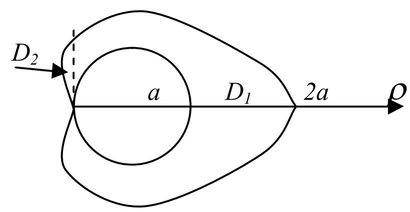
Если область D правильная в направлении оси OX (т.е. любая прямая, параллельная оси OX, пересекает границу области не более чем в двух точках), то

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Полярная система координат</td></tr>
<tr><td>


Если область D^* правильная (т.е. луч, выходящий из полюса, пересекает ее границу не более чем в двух точках), то

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D^*} f(r,\varphi)rdrd\varphi=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rf(r,\varphi)dr$$
</td>
<td>
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=a(1+\cos\varphi)$, $r=a\cos\varphi$.

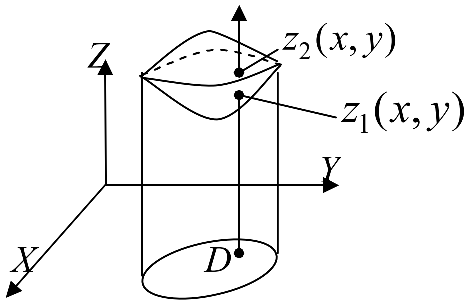
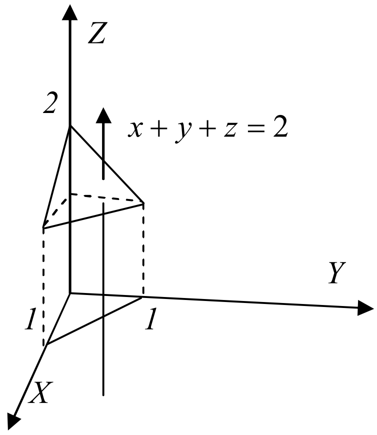
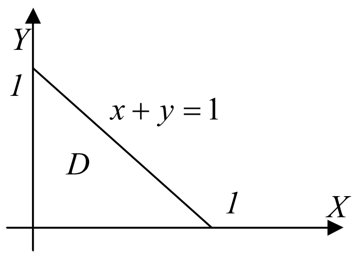
Р е ш е н и е

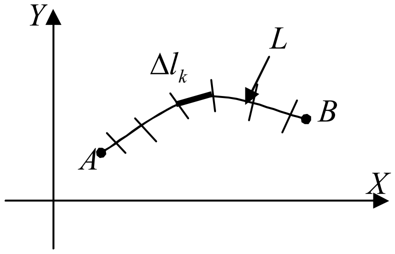
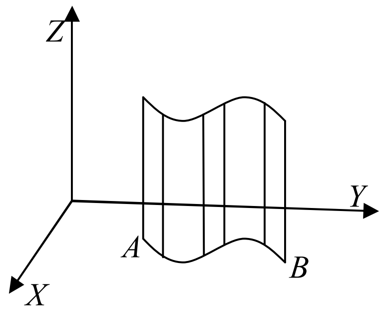
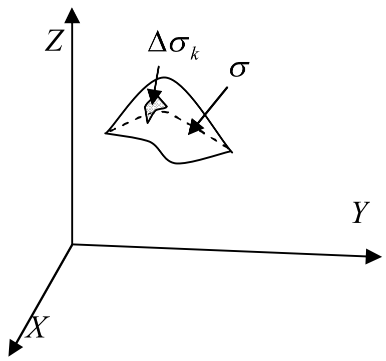


$$S=\iint_D rdrd\varphi=2\iint_{D_1} rdrd\varphi+2\iint_{D_2} rdrd\varphi=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^{a(1+\cos\varphi)} rdr=\frac{5}{4}\pi a^2$$
</td></tr>
</table>

Вычисление тройного интеграла

Формулы	П р и м е р
Пусть областью интегрирования V является тело, ограниченное снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху – поверхностью $z = z_2(x, y)$, причем $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ – непрерывные функции в замкнутой области D, являющейся проекцией тела на плоскость OXY. Тогда область V – правильная в направлении оси OZ.  В декартовых координатах $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$ В цилиндрических координатах $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz =$ $= \iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz =$ $= \iint\limits_{D^*} rdrd\varphi \int\limits_{z1}^{z2} f(r, \varphi, z)dz.$ В сферических координатах $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz =$ $= \iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta; \rho\sin\varphi\sin\theta; \rho\cos\theta) \times$ $\times \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$	Вычислить $\iiint\limits_V (x + z)dxdydz$, где область V ограничена плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 1,\ x + y + z = 2$.  Р е ш е н и е Область V является правильной в направлении оси OZ.  Ее проекция D на плоскость OXY является правильной в направлении оси OY. $\iiint\limits_M (x + z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_1^{2-x-y} (x + z)dz =$ $= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_1^{2-x-y} (x + z)dz = \frac{1}{4}$

Определение и обозначение интеграла	Геометрический и физический смысл
Криволинейный интеграл I рода от функции *f(x,y)* по кривой (L) : $\int\limits_L f(x,y)dl = \lim\limits_{\delta\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\varsigma_k,\eta_k)\Delta l_k$, где $\Delta l_k\,(k=\overline{1,n})$ – длины дуг, на которые разбита кривая; δ – наибольшая из длин дуг; (ς_k,η_k) – произвольная точка на k -м участке. 	Если $\rho=\rho(x,y)$ – плотность неоднородной материальной кривой *L*, то $\int\limits_L \rho(x,y)dl = m -$ масса плоской кривой , $\int\limits_L dxdy = l -$ длина плоской кривой *L*. Если $y = f(x,y)$ – направляющая цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси *OZ*, то $\int\limits_L f(x,y)dl = Q$ – площадь поверхности, задаваемой функцией $y = f(x,y)$. 
Поверхностный интеграл I рода от функции *f(x,y,z)* по поверхности: $\iint\limits_\sigma f(x,y,z)d\sigma = \lim\limits_{\delta\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\varsigma_k,\eta_k,\xi_k)\Delta\sigma_k$, где $\Delta\sigma_k\,(k=\overline{1,n})$ – площади участков, на которые разбита поверхность σ ; δ – наибольший из диаметров участков; $(\varsigma_k,\eta_k,\xi_k)$ – произвольная точка на k -м участке	Если $\rho=\rho(x,y,z)$ – плотность распределения массы материальной поверхности σ, то $\iint\limits_\sigma \rho(x,y,z)d\sigma = m -$ масса поверхности.  $\iint\limits_\sigma d\sigma = S$ – площадь поверхности σ

Свойства	Формула
Аддитивность по функции	$\int_L (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))dl = \int_L f_1(x,y)dl \pm \int_L f_2(x,y)dl$
Аддитивность по области интегрирования	$\int_L f(x,y)dl = \int_{L_1} f(x,y)dl + \int_{L_2} f(x,y)dl$, где путь интегрирования $L = L_1 \cup L_2$
Однородность	$\int_L c \cdot f(x,y)dl = c\int_L f(x,y)dl$
Теорема о среднем	$\exists\ M_0(x_0,y_0) \in L$, $\int_L f(x,y)dl = f(x_0,y_0)\cdot l$
Интегрирование неравенств	$\forall (x;y) \in L : f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \int_L f(x,y)dl \le \int_L g(x,y)dl$
Интеграл по модулю	$\left\lvert \int_Д f(x,y)dl \right\rvert \le \int_L \lvert f(x,y)\rvert dl$
Незваисимость интеграла от направления пути интегрирования	$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl$

Замечание. Свойства криволинейного и поверхностного интегралов I рода аналогичны.

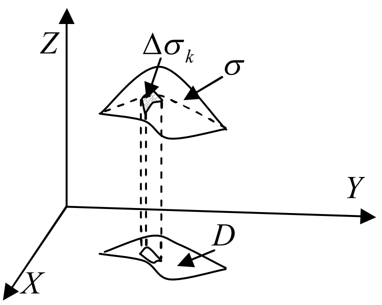
Физические приложения интегралов I рода

Приложения	Криволинейный интеграл	Поверхностный интеграл
Моменты инерции	$I_x = \int_L y^2\rho(x,y)dl$ $I_y = \int_L x^2\rho(x,y)dl$	$I_x = \iint_\sigma (y^2+z^2)\rho(x,y,z)d\sigma$ $I_y = \iint_\sigma (x^2+z^2)\rho(x,y,z)d\sigma$ $I_z = \iint_\sigma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)d\sigma$
Статические моменты	$M_x = \int_L y\rho(x,y)dl$ $M_y = \int_L x\rho(x,y)dl$	$M_{yz} = \iint_\sigma x\cdot\rho(x,y,z)d\sigma$ $M_{xy} = \iint_\sigma z\cdot\rho(x,y,z)d\sigma$ $M_{xz} = \iint_\sigma y\cdot\rho(x,y,z)d\sigma$
Координаты центра тяжести	$x_c = \frac{M_y}{m_D};\quad y_c = \frac{M_x}{m_D}$	$x_c = \frac{M_{yz}}{m_V};\quad y_c = \frac{M_{xz}}{m_V};\quad z_c = \frac{M_{xy}}{m_V}$

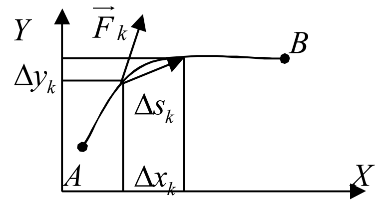
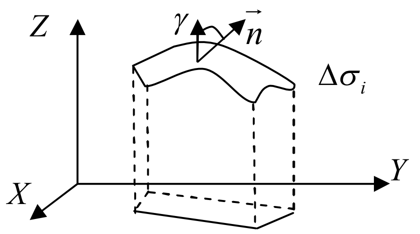
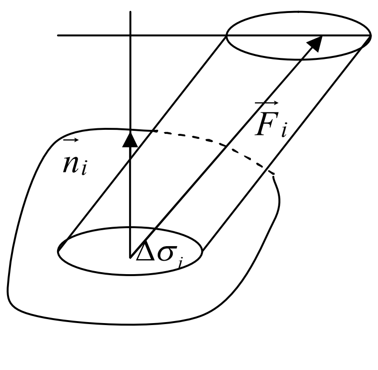
Вычисление криволинейного интеграла I рода

Формулы	П р и м е р
1. Параметрическое представление кривой интегрирования: $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1, t_2]$. $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ 2. Явное представление кривой интегрирования: $y = y(x), \quad x \in [a,b]$. $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$ 3. Полярное представление кривой интегрирования: $r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$. $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$	Вычислить $\int\limits_L xy^2 dl$, где L – отрезок прямой между точками $O(0;0)$ и $A(4;3)$. Р е ш е н и е Уравнение прямой OA есть $y = \frac{3}{4}x, \quad 0 \le x \le 4$. Кривая задана явно. $\left(\frac{3}{4}x'\right) = \frac{3}{4}$. $\int\limits_L xy^2 dl = \int\limits_0^4 x \cdot \left(\frac{3}{4}x\right)^2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}\,dx =$ $= \frac{45}{64}\int\limits_0^4 x^3 dx = 45$

Вычисление поверхностного интеграла I рода

Формулы	П р и м е р
Если поверхность σ задана на области D плоскости OXY функцией $z = z(x,y)$, то $\iint\limits_\sigma f(x,y,z)d\sigma =$ $= \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$ 	Вычислить $\iint\limits_\sigma (x - 3y + 2z)d\sigma$, где σ – часть плоскости $4x + 3y + 2z - 4 = 0$, расположенной в первом октанте. Р е ш е н и е Запишем уравнение плоскости в виде $z = 2 - 2x - \frac{3}{2}y$. Находим $z'_x = -2,\ z'_y = -\frac{3}{2}$. $\iint\limits_\sigma (x - 3y + 2z)d\sigma =$ $= \iint\limits_D (x - 3y + 4 - 4x - 3y)\times$ $\times\sqrt{1 + 4 + \frac{9}{4}}\,dxdy = \frac{\sqrt{29}}{9}$

Криволинейные и поверхностные интегралы II рода (по координатам)

Определение и обозначение интеграла	Геометрический и физический смысл
Криволинейный интеграл II рода от векторной функции $\overline{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ по плоской кривой: $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim\limits_{\delta \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} (P(\varsigma_k, \eta_k)\Delta x_k + {}$ ${} + Q(\varsigma_k, \eta_k)\Delta y_k)$, где Δx_k – проекция элементарной дуги Δl_k на ось *OX*; Δy_k – проекция элементарной дуги Δl_k на ось *OY*; (ς_k, η_k) – произвольная точка на k-м участке. Если, $\Delta s_k = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$, то $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_L F ds$. $\oint\limits_L Pdx + Qdy$ – криволинейный интеграл по замкнутой кривой *L*	Если $\overline{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ – вектор силы, перемещающей точку по кривой *L*, то $\int\limits_L Pdx + Qdy = A$ – работа переменной силы по перемещению точки вдоль кривой,  $\frac{1}{2}\oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = S(D)$ – площадь области *D*, где ∂D – граница области *D*
Поверхностный интеграл II рода от векторной функции $\vec{F} = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$ по поверхности: $\iint\limits_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma =$ $= \iint\limits_\sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$, где $\overline{n_i} = \cos\alpha_i\; i + \cos\beta_i\; j + \cos\gamma_i k$ – единичный вектор нормали к $\Delta\sigma_i$;  $\oiint\limits_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma$ – интеграл по замкнутой поверхности σ	Если $\overline{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ – вектор скорости потока жидкости, протекающей через двустороннюю поверхность σ, одна из сторон которой выбрана для построения нормалей, то $\iint\limits_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma = \Pi$ – поток жидкости через выбранную сторону поверхности σ 

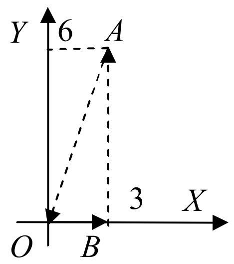
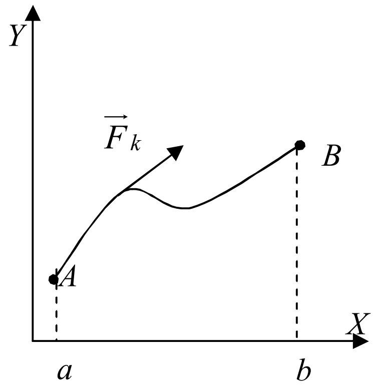
Свойства	Формула
Однородность	$\int\limits_L Fds = c\int\limits_L Fds$
Аддитивность по области интегрирования	$\int\limits_{AB} Fds = \int\limits_{AC} Fds + \int\limits_{CB} Fds$
Аддитивность по функции интегрирования	$\int\limits_L (F_1 + F_2)ds = \int\limits_L F_1 ds + \int\limits_L F_2 ds$
Изменение знака интеграла при изменении направления пути интегрирования	$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = -\int\limits_{BA} Pdx + Qdy$
Независимость криволинейного интеграла II рода по замкнутой кривой от выбора начальной точки	$\oint\limits_{ACA} = \oint\limits_{CAC}$
Условие независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования	$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ – условие Грина

Замечание. Свойства аддитивности и однородности криволинейного и поверхностного интегралов II рода аналогичны.

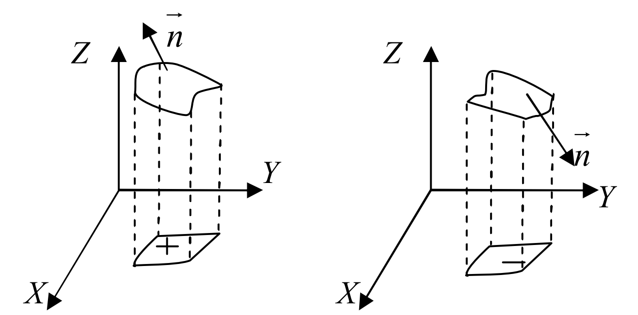
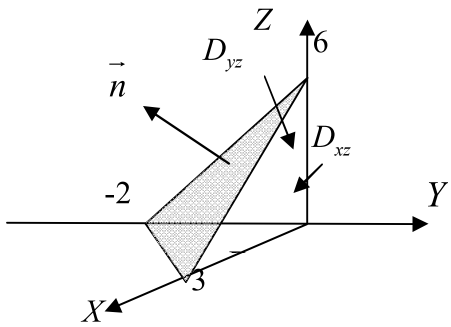
Теоремы о связи между интегралами

Теорема	Формула связи
Формула Грина о связи между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом по границе этой области L	$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy,$ где интегрирование вдоль кривой производится в положительном направлении (т.е. при движении вдоль кривой область D остается слева)
Формула Стокса о связи между поверхностными и криволинейными интегралами II рода	$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_\sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{dx} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma,$ где L – граница поверхности σ и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении
Формула Остроградского-Гаусса о связи между поверхностным интегралом II рода по замкнутой поверхности с тройным интегралом по объему, ограниченному этой поверхностью	$\oiint\limits_\sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right)dxdydz,$ где σ – граница области V и интегрирование по σ производится по внешней стороне поверхности

Вычисление криволинейного интеграла II рода

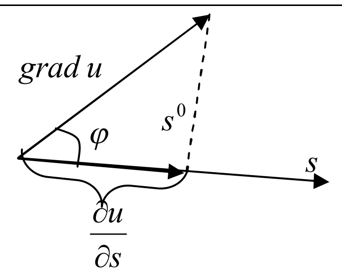
Формулы	П р и м е р
Параметрическое представление кривой интегрирования $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1, t_2]$: $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$ $= \int\limits_{t1}^{t2} \left[P(x(t),y(t))x'_t + Q(x(t),y(t))y'_t\right]dt$	Найти работу силы $\vec{F} = (8x+4y+2)\vec{i} + (8y+2)\vec{j}$, где L – контур ΔOBA, пробегаемый в положительном направлении, и $A(3,6),\ B(0,6),\ O(0,0)$  Р е ш е н и е По свойству аддитивности: $\int\limits_L = \int\limits_{OB} + \int\limits_{BA} + \int\limits_{AO}$.
Явное представление кривой интегрирования $y = y(x), \quad x \in [a,b]$: $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$ $= \int\limits_a^b \left[P(,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right]dx$  	AO: $y = 2x, \quad x \in [0,3], \quad dy = 2dx$, $\int\limits_{AO} (8x+4y+2)dx + (8y+2)dy =$ $= \int\limits_3^0 \left[(8x + 4\cdot 2x + 2)dx + (8\cdot 2x + 2)\cdot 2dx\right] = -234.$ OB: $y = 0, \quad x \in [0,3], \quad dy = 0$, $\int\limits_{OB} (8x+4y+2)dx + (8y+2)dy =$ $= \int\limits_0^3 (8x+2)dx = 42$. BA: $x = 3, \quad y \in [0,6], \quad dx = 0$, $\int\limits_{BA} (8x+4y+2)dx + (8y+2)dy =$ $= \int\limits_0^6 (8y+2)dy = 156$. $A = -243 + 42 + 156 = -36$. Проверим полученный результат, используя формулу Грина. Имеем замкнутый контур – треугольник OBA. $P'_y = (8x+4y+2)'_y = 4,\ Q'_x = (8y+2)'_x = 0$, $A = \iint\limits_D -4dxdy = -4\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{2y} dy = -36$

Вычисление поверхностного интеграла II рода

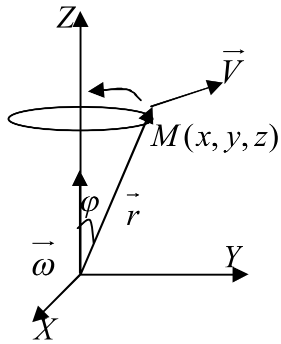
Формулы	П р и м е р
$\iint\limits_{\sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$. Если поверхность σ задана на области D плоскости OXY функцией $z = z(x,y)$, то $\iint\limits_{\sigma} R\cos\gamma\ d\sigma = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\ dxdy$, где D_{xy} – проекция поверхности σ на OXY. Знак плюс или минус перед двойным интегралом берется в зависимости от ориентации поверхности σ ($\cos\gamma$ будет положительным или отрицательным).  Аналогично: $\iint\limits_{\sigma} R\cos\alpha\ d\sigma = \pm\iint\limits_{D_{yz}} R(x(y,z),y,z)\ dydz$; $\iint\limits_{\sigma} R\cos\beta\ d\sigma = \pm\iint\limits_{D_{xz}} R(x,y(x,z),z)\ dxdz$; $\iint\limits_{\sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma =$ $= \iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$ $= \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z)y,z)dydz \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(,y(x,z)z)dxdz \pm$ $\pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y,))dxdy$	Вычислить $\iint\limits_{\sigma} -xdydz + zdzdx + 5dxdy$. А) По верхней стороне части плоскости $2x - 3y + z = 6$, лежащей в IV октанте. Б) По внешней стороне пирамиды, ограниченной плоскостями $2x - 3y + z = 6$, $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$. Р е ш е н и е  А) Нормаль $\vec{n} = (2;-3;1)$, соответствующая указанной стороне поверхности, образует с осью OY тупой угол, а осями OX и OZ – острые углы. $\cos\alpha = \frac{n_x}{\lvert\vec{n}\rvert} = \frac{2}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{2}{\sqrt{14}} > 0$. $\cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{14}} < 0, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}} > 0.$ $\iint\limits_{\sigma} -xdydz + zdzdx + 5dxdy =$ $= +\iint\limits_{D_{yx}}(-3 - \frac{3}{2}y + \frac{z}{2})dydz -$ $-\iint\limits_{D_{xz}} zdzdx + 5\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = -9$. Б) По формуле Стокса имеем: $\oint\!\!\oint\limits_{+\sigma} -xdydz + zdzdx + 5dxdy =$ $= \iiint\limits_{V}(-1+0+0)dxdydz = -\iiint\limits_{V} dv = -6$

Раздел 15. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Скалярное поле

<table>
<tr><th>Понятия</th><th>Определения и формулы</th><th>П р и м е р</th></tr>
<tr><td>Определение поля</td><td>Скалярное поле – часть пространства, в каждой точке M(x,y,z) которого задана скалярная функция $u = f(x,y,z)$</td><td rowspan="5">Найти производную функции $u = 3x^2 + 5y^2$ в точке $A(1,-1)$ по направлению к точке $B(2,1)$. Определить величину и направление максимального роста данной функции в точке A.
Р е ш е н и е
$\frac{\partial u}{\partial s}(A) = u'_x(A)\cos\alpha + u'_y(A)\cos\beta$
$u'_x = 6x,\ u'_y = 10y,$
$u'_x(A) = 6\cdot 1 = 1,$
$u'_y(A) = 10\cdot(-1) = -10.$
$\bar{s} = \overrightarrow{AB} = (1,2),$
$\left|\vec{s}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$
$\cos\alpha = \frac{s_x}{\left|\vec{s}\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}},$
$\cos\beta = \frac{s_y}{\left|\vec{s}\right|} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$
$\frac{\partial u}{\partial s}(A) = 6\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - 10\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{14}{\sqrt{5}}.$
Функция в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$ убывает.
Градиент указывает направление, в котором функция растет быстрее, чем по другим направлениям.
$\overrightarrow{gradu}(A) = \left(u'_x(A), u'_y(A)\right) \Rightarrow$
$\overrightarrow{gradu}(A) = (6,-10).$
Максимальный рост в точке A соответствует длине вектора градиента:
$\left|\overrightarrow{grad}\ u(A)\right| = \sqrt{6^2 + (-10)^2} = 136$</td></tr>
<tr><td>Геометрические характеристики скалярного поля</td><td>Поверхность (линия) уровня скалярного поля есть геометрическое место точек, в которых функция принимает постоянное значение, т.е u(M)=c.
Для плоского поля $u = f(x,y)$ линия уровня $f(x,y) = c$, для пространственного поля $u = f(x,y,z)$ поверхность уровня $f(x,y,z) = c$</td></tr>
<tr><td>Производная функции $u = f(x,y,z)$ по направлению вектора $\vec{s}$</td><td>$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta +$
$+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где
$\overrightarrow{s^0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$</td></tr>
<tr><td>Градиент функции $u = f(x,y,z)$</td><td>$\overline{grad\ u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$</td></tr>
<tr><td>Связь между характеристиками</td><td>
$\frac{\partial u}{\partial s} = np_{\overline{s^0}}\ \overline{grad\ u},$
$\max\limits_{s}\frac{\partial u}{\partial s} = \left|\overline{grad\ u}\right|$</td></tr>
</table>

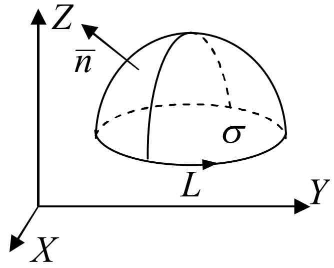
Векторное поле

Основные понятия	Формулы и поясняющие рисунки	П р и м е р
1	2	3
Определение поля	*Векторное поле* – часть пространства, в каждой точке *M(x,y,z)* которого задана векторная функция $\bar{a} = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$. Для плоского поля $\bar{a} = a_x(x,y)\vec{i} + a_y(x,y)\vec{j}$	Поле линейных скоростей вращающегося тела имеет вид: $\vec{V} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$  Найти: А) векторные линии поля; Б) дивергенцию поля; В) циркуляцию вектора поля; Г) ротор поля. Р е ш е н и е А) Имеем плоское векторное поле: $a_x = -\omega y,\ a_y = \omega x$. $\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} = \frac{dz}{0} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} \omega x dx = -\omega y dy, \\ 0 \cdot dy = \omega x dz. \end{cases}$ Интегрируем: $\begin{cases} x^2 + y^2 = c_1, \\ z = c_2. \end{cases}$ Т.о., векторные линии – окружности с центрами на оси *OZ*, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к этой оси
Геометрические характеристики	*Векторные линии* – кривые, в каждой точке которых вектор поля направлен по касательной: $\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}$. *Векторная трубка* – поверхность, образованная векторными линиями	
Поток вектора через поверхность σ	*Поток вектора* $\vec{a}$ через поверхность σ – интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности: $$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a}\overrightarrow{n^o} d\sigma$$	
Дивергенция векторного поля	*Дивергенция вектора* $\vec{a}$ – скаляр, равный объемной плотности потока в рассматриваемой точке поля: $$div\,\vec{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oiint_{\sigma} \vec{a}\overrightarrow{n^0} d\sigma}{V},$$ где σ – замкнутая поверхность, ограничивающая объем *V*; $\overrightarrow{n^0}$ – орт ее внешней нормали; объем $V \to 0$ стягивается к рассматриваемой точке. Расчетная формула: $$div\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$	
Связь между характеристиками	Векторная формулировка теоремы Гаусса – Остроградского: $$\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{a}\overrightarrow{n^0} d\sigma = \iiint_{V} div\,\vec{a}\,dV$$	

Продолжение таблицы

1	2	3
Циркуляция векторного поля	Пусть $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус-вектор точки *M* на контуре *L*. *Циркуляция вектора* $\vec{a}$ вдоль *L* – криволинейный интеграл по замкнутому контуру *L* от скалярного произведения вектора $\vec{a}$ на вектор $\overrightarrow{dr}$, касательный к контуру *L*. $C = \oint\limits_L \vec{a}\,\overrightarrow{d\tau} = \oint\limits_L a_x dx + a_y dy + a_z dz$. Физический смысл: $\oint\limits_L \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = A$ – работа силы $\vec{F}(M)$ поля при перемещении материальной точки вдоль замкнутого контура *L*	Б) $div\vec{V}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) +$ $+ \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) = 0$. В) Будем считать, что направление нормали к плоскости совпадает с направлением оси *OZ*. $C = \oint\limits_{Д} -\omega y dx + \omega x dy =$ $= 2\omega(\frac{1}{2}\oint\limits_L - ydx + xdy) =$ $= 2\omega \cdot S$, где *S* – площадь поверхности, ограниченной кривой *L*. Заметим, что если нормаль к поверхности *S* образует угол γ с осью *OZ*, то циркуляция $C = 2\omega \cdot S \cdot \cos\gamma$. Г) $rot\vec{V}(M) =$ $= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} =$ $= -\frac{\partial(\omega x)}{\partial z}\vec{i} - \left(-\frac{\partial(\omega y)}{\partial z}\right)\vec{j} +$ $+ \left(\frac{\partial(\omega x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial y}\right)\vec{k} =$ $= 2\omega\vec{k}$
Ротор векторного поля	*Ротор* поля $rot\,\vec{a}$ – вектор, проекция которого на любое направление $\vec{n}$ равна поверхностной плотности циркуляции по контуру площадки, перпендикулярной к этому направлению. $(rot\,\vec{a})\overrightarrow{n^0} = rot_n\vec{a}(M) = \frac{\lim\limits_{\sigma \to 0} \oint\limits_L \vec{a}\,\overrightarrow{d\tau}}{\sigma}$, где σ – поверхность, натянутая на замкнутый контур *L*; $\overrightarrow{n^0}$ – орт нормали к поверхности, направленный в ту сторону поверхности, с которой обход контура *L* виден совершающимся против часовой стрелки. Расчетная формула: $rot_n\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$	

Окончание таблицы

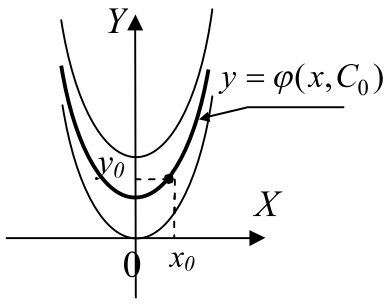
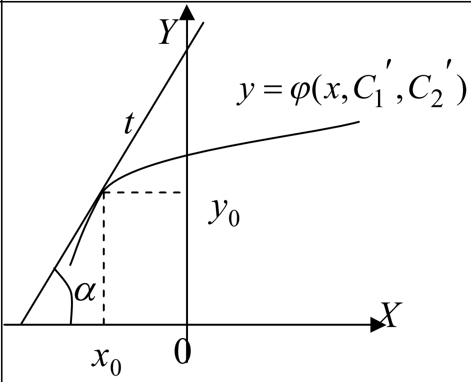
1	2	3
Связь между характеристиками	Векторная формулировка теоремы Стокса: $\oint\limits_L \vec{a}\,\overrightarrow{d\tau} = \iint\limits_\sigma rot_n \vec{a}\, d\sigma$ 	Ротор поля направлен параллельно оси вращения, его модуль равен удвоенной угловой скорости. С точностью до числового множителя ротор поля скоростей представляет собой угловую скорость вращения твердого тела

Классификация векторных полей

Вид поля	Свойства	П р и м е р ы
Соленоидальное, $div\,\vec{a} = 0$	$1.\ \Pi = \oint\!\!\!\oint\limits_\sigma \vec{a}\,\overrightarrow{n^0} d\sigma = \iiint\limits_V div\,\vec{a}\, dV = 0.$ $2.\ \Pi = \iint\limits_{\sigma_1} \vec{a}\,\overrightarrow{n^0} d\sigma = \iint\limits_{\sigma_2} \vec{a}\,\overrightarrow{n^0} d\sigma$, где σ_1, σ_2 – произвольные поперечные сечения векторной трубки	Поле линейных скоростей вращающегося твердого тела. Для поля скоростей текущей жидкости Π=0 означает, что количество жидкости, входящей в трубку за единицу времени, равно количеству жидкости, вытекающей из нее, т.е. в поле нет источников и стоков
Потенциальное, $rot\,\vec{a} = 0$	$1. \exists\, u(x, y, z)$ – потенциал поля: $\vec{a} = grad\; u$. $2.\ \int\limits_{AB} \vec{a}\; d\tau = u(B) - u(A).$ $3.\ C = \iint\limits_\sigma rot\,\vec{a}\,\overrightarrow{n^0} d\sigma = 0$	Для силового потенциального поля равенство C=0, означает, что работа силы по любому замкнутому контуру равна нулю. В поле скоростей текущей жидкости равенство C=0 означает, что в потоке нет замкнутых струек (водоворотов)
Гармоническое, $div\,\vec{a} = 0$, $rot\,\vec{a} = 0$	$div\,\vec{a} = div\,grad\,u =$ $= div(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k) =$ $= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u = 0$	Поле линейных скоростей стационарного безвихревого потока жидкости при отсутствии в нем источников и стоков является гармоническим

Раздел 16. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ДУ)

Основные понятия

Понятия	ДУ 1 порядка	ДУ 2 порядка
Общий вид	$F(x, y, y') = 0$	$F(x, y, y', y'') = 0$
ДУ, разрешенное относительно производной	$y' = f(x, y)$ или в дифференциальной форме $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$	$y'' = f(x, y, y')$
Задача Коши	$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$
Геометрическая интерпретация решения ДУ	 $y = \varphi(x, C)$ – общее решение, представляет семейство интегральных кривых. $y = \varphi(x, C_0)$ – частное решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Решение задачи Коши состоит в нахождении интегральной кривой $y = \varphi(x, C_0)$, проходящей через точку $(x_0; y_0)$	 $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ – общее решение. $y = \varphi(x, C_1', C_2')$ – частное решение ДУ, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Решение задачи Коши состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ и имеющей данный угловой коэффициент y'_0 касательной t

Интегрирование ДУ первого порядка

Тип	Уравнение	Решение
ДУ с разделенными переменными	$M(x)dx + N(y)dy = 0$	Применяем почленное интегрирование $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$ – общий интеграл
ДУ с разделяющимися переменными	$y' = f(x)g(y)$ или в дифференциальной форме $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$	Делим на $N_1(y)M_2(x) \neq 0$ и применяем почленное интегрирование $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$
Однородное ДУ	$y' = f(\frac{y}{x})$, где $f(tx, ty) = f(x, y)$ или $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$, где $M(tx, ty) = t^k M(x; y)$ $N(tx, ty) = t^k N(x; y)$	Подстановка $t = \frac{y}{x}$. Тогда $y = tx$, $y' = t'x + t$, $\ln Cx = \int \frac{dt}{f(t) - t}$ – общий интеграл
Линейное ДУ (ЛДУ)	$y' + P(x)y = Q(x)$ Если $Q(x) = 0$, то $y' + P(x)y = 0$ – линейное однородное ДУ (ЛОДУ) Если $Q(x) \neq 0$, то $y' + P(x)y = Q(x)$ – линейное неоднородное ДУ (ЛНДУ)	$y = Ce^{\int -Pdx}$ – общее решение ЛОДУ Решение ЛНДУ: 1) *метод Бернулли* Подстановка $y = u(x)v(x)$. Тогда ЛНДУ: $\begin{cases} v'(x) + P(x)v(x) = 0; \\ u'(x)v(x) = Q(x) \end{cases}$ 2) *метод Лагранжа* $y = C(x)e^{\int -Pdx} =$ $e^{\int -Pdx}(C + \int Qe^{\int Pdx}dx)$ общее решение ЛНДУ
Уравнение Бернулли	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ $(n \neq 0, n \neq 1)$	Подстановка $z = y^{-n+1}$ или $y = u(x)v(x)$
Уравнение в полных дифференц	$M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$,	$\int_{x_0}^{x} M(x; y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0; y)dy = C$

иалах	если $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$	

Интегрирование ДУ, допускающих понижение порядка

Уравнения, допускающие понижение порядка

1. $y^{(n)}=f(x)$

   n-кратное интегрирование
   Если
   $y''=f(x,y)$, то
   $y=\int(F(x)+C_1)dx+C_2$

2. $F(y^{(n)},...,y^{(k)},x)=0$
   явно отсутствует y

   Подстановка
   $y^{(k)}=z$
   $y^{(k+1)}=z'$ и т.д.

   Если $F(x,y',y'')=0$,
   то $y'=z,\ y''=z'$

3. $F(y,y',..,y^{(n)})=0$
   явно отсутствует x

   Если
   $F(y,y',y'')=0$,
   то подстановка $y'=p$;
   т.к. $\dfrac{dy}{dx}=p$, то $dx=\dfrac{dy}{p}$;
   $y''_{xx}=p'_x=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot p$

Теоремы о структуре общего решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Формулировка теоремы	Формула
Общее решение ЛОДУ $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ есть линейная комбинация двух линейно-независимых частных решений $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$	$y=C_1y_1+C_2y_2$, где C_1,C_2 – произвольные постоянные
Общее решение ЛНДУ $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ есть сумма его произвольного частного решения ЛНДУ и общего решения соответствующего ЛОДУ	$y=\overline{y}+y^*$, где y^* – произвольное частное решение ЛНДУ; $\overline{y}$ – общее решение соответствующего ЛОДУ

Частное решение ЛНДУ $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$ есть сумма частных решений уравнений $y'' + py' + qy = f_1(x)$, (1) $y'' + py' + qy = f_2(x)$ (2)	$y^* = y_1^* + y_2^*$, где y_1^* и y_2^* – частные решения уравнений (1) и (2)

Интегрирование однородных линейных ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

ЛОДУ	$y'' + py' + qy = 0$		
1. Характеристическое уравнение	$k^2 + pk + q = 0$ (т.к. вид частного решения $y = e^{kx}$)		
2. Дискриминант $D = p^2 - 4q$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
3. Корни характеристического уравнения	$k_1 \neq k_2 \in R$	$k_1 = k_2 = k \in R$	$k_1 = \alpha + \beta i \in C$ $k_2 = \alpha - \beta i \in C$
4. Общее решение	$C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$C_1 e^{kx} + xC_2 e^{kx}$	$e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x +$ $+ C_2 \sin\beta x)$

Интегрирование линейных неоднородных ДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Вид правой части $f(x)$	$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$	$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x +$ $+ Q_m(x)\sin\beta x]$
Вид частного решения	$y* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$, где α – корень кратности r характеристического уравнения; $Q_n(x)$ – многочлен степени *n*, записанный в общем виде	$y* = x^r e^{\alpha x}[P_N(x)\cos\beta x +$ $+ Q_N(x)\sin\beta x]$, где $\alpha \pm \beta i$ – корни кратности r характеристического уравнения; $P_N(x)$ и $Q_N(x)$ – многочлены степени $N = \max(n; m)$
Подбор частного решения по виду правой части		

$y''+2y'+y=f(x)$ $k^2+2k+1=0$ $k_1=k_2=k=-1$ $\overline{y}=e^x(C_1+xC_2)$	1) $f(x)=2x^2$ $y^*=Ax^2+Bx+C$ 2) $f(x)=3e^{-x}$ $y^*=Ax^2e^{-x}$ $(\alpha=-1=k_{1,2},r=2)$	1) $f(x)=x\cos x$ $y^*=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$ 2) $f(x)=e^x\sin x$ $y^*=e^x(A\cos x+B\sin x)$

Этапы решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида	П р и м е р : $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=c$
1. Для ЛОДУ составить и решить характеристическое уравнение	ЛОДУ: $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$. Характеристическое уравнение: $k^2+\omega^2=0$. Корни характеристического уравнения: $k_{12}=\pm\omega i$
2. Записать общее решение ЛОДУ	$\overline{x}=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)=C\cos\omega t+B\sin\omega t$. *Замечание.* Пусть $C=A\sin\varphi_0$; $B=A\cos\varphi_0$, тогда $\overline{x}=A(\sin\varphi_0\cos\omega t+\cos\varphi_0\sin\omega t)$. Получаем функцию простого гармонического колебания $\overline{x}=A\sin(\omega t+\varphi_0)$, где A – амплитуда колебания; ω – частота; φ_0 – начальная фаза
3. По правой части подобрать вид частного решения	Правая часть имеет специальный вид первого типа: $f(t)=c=ce^{0t}$. Имеем $\alpha=0\neq\pm\omega i\Rightarrow r=0\Rightarrow x^*=D$
4. Найти неопределенные коэффициенты и записать частное решение ЛНДУ	Подбираем неопределенный коэффициент D для частного решения $x^*=D$: $(x^*)'=(D)'=0$; $(x^*)''=0$. Подставим $(x^*)''$ и x^* в дифференциальное уравнение: $0+\omega^2D=c\Rightarrow D=\dfrac{c}{\omega^2}\Rightarrow x^*=\dfrac{c}{\omega^2}$
5. Записать общее решение ЛНДУ	$x=\overline{x}+x^*=A\sin(\omega t+\varphi_0)+\dfrac{c}{\omega^2}$

Замечание. В общем случае, когда правая часть ЛНДУ не имеет специального вида, для отыскания частного решения применяется метод *вариации произвольных постоянных.*

Пусть $\overline{y}=C_1y_1+C_2y_2$ – общее решение ЛОДУ второго порядка. Постоянные C_1 и C_2 заменяются функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$ и подбираются так, чтобы функция $y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ была решением ЛНДУ.

$C_1(x)$ и $C_2(x)$ находятся из системы дифференциальных уравнений вида: $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$

Раздел 17. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Получение функции на основании экспериментальных данных по методу наименьших квадратов

Аппроксимация – приближение исходной функции другой, более удобной для ее обработки и анализа.

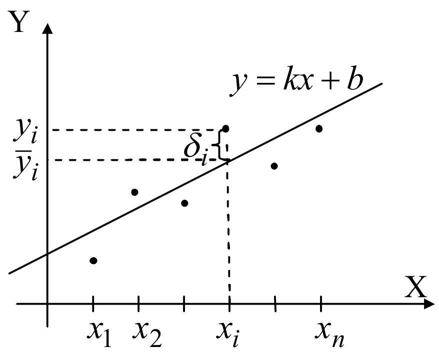
Интерполяция – это восстановление функции (точное или приближенное) по известным ее значениям, т.е. замена табличной функции другой, заданной в аналитическом виде.

Пусть исходная функция задана таблицей $\{x_i, y_i\}$, $i=\overline{1,n}$.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_i	y_1	y_2	…	y_n

Метод наименьших квадратов заключается в отыскании такой аппроксимирующей функции, которая дает наилучшее приближение в среднем, т.е. обеспечивает минимум квадратичного отклонения.

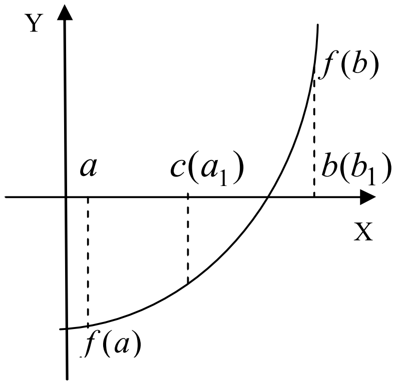
В соответствии с методом наименьших квадратов необходимо минимизировать сумму $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\bar{y}(x_i)-y_i\right)^2$, где x_i, y_i − значения опытных данных; $\bar{y}(x_i)$ − значение функции, взятое на эмпирической зависимости в точке x_i; n − число опытов. Предположим, что между x и y существует линейная зависимость, выражающаяся формулой $y=ax+b$. Требуем, чтобы квадратичное отклонение $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(ax_i+b-y_i\right)^2$ было минимальным. Функция S имеет минимум в тех точках, в которых частные производные от S по параметрам a и b обращаются в нуль. В результате дифференцирования и преобразований получаем систему линейных уравнений для определения a и b:



$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+b\cdot n=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

Приближенные методы решения уравнений вида *f(x)* = 0

Метод половинного деления



Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)\cdot f(b)<0$.

Делим отрезок $[a,b]$ пополам, $c=\dfrac{a+b}{2}$ – середина отрезка. Если $f(c)=0 \Rightarrow c$ – корень уравнения.

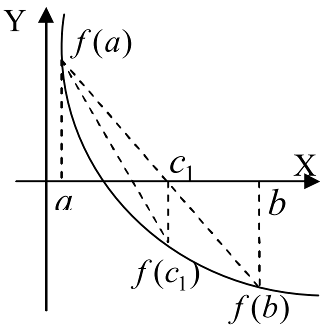
Если $f(c)\neq 0 \Rightarrow$ выбираем одну из половин, где $f(c)\cdot f(x_{гран})<0$, $x_{гран}$ – или a, или b.

Отрезок $[c,x_{гран}]=[a_1,b_1]$ снова делим пополам и выполняем те же действия.

$[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$,…, $[a_n,b_n]$ – последовательность вложенных отрезков, где $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$. Итерационный процесс прекращается, когда $|b_n-a_n|<\varepsilon$ и/или $|f(c_n)|<\varepsilon$, где ε – заданная точность нахождения корня.

Метод хорд

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и меняет знак на данном отрезке.



Пусть $f(a)>0$, $f(b)<0$.

Проведем хорду, соединяющую точки $(a,f(a))$ и $(b,f(b))$. Уравнение хорды:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Координата пересечения хорды с осью абсцисс: $c_1=a-f(a)\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}$. Точка c_1 делит отрезок $[a,b]$ на две части. Выбираем ту часть, где функция меняет знак, и повторяем действия до тех пор, пока $|f(c_n)|<\varepsilon$, где ε – заданная точность нахождения корня.

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Разностная схема Эйлера

Рассмотрим задачу Коши: $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$; $y(a)=y_0$.

Делим отрезок $[a,b]$ на N шагов: $h=x_{k+1}-x_k=(b-a)/N$. Заменяем значения функции y в узлах x_k значениями сеточной функции y_k: $y_{k+1}=y_k+y'(x_k)h$. Из исходного уравнения имеем $y'(x_k)=f(x_k,y_k)$. Формула метода Эйлера: $y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)$.

При $k=0 \Rightarrow y_1=y_0+hf(x_0,y_0)$, значение y_0 находим из начального условия. При $k=1 \Rightarrow y_2=y_1+hf(x_1,y_1)$ и т.д.

Геометрический смысл схемы Эйлера: замена $y(x)$ на отрезке $[x_k,x_{k+1}]$ отрезком касательной, проведённой к графику в точке x_k.

Методы Рунге–Кутта

Если в формуле Эйлера заменить $f(x_k,y_k)$ на более общее выражение $\hat{f}(x_k,y_k)$, то получаем общую формулу одношагового метода: $y_{k+1}=y_k+h\hat{f}(x_k,y_k)$, $y(a)=y_0$. Вместо дифференциального уравнения решается нелинейное разностное уравнение.

Формула	Вспомогательные величины	Название
$\hat{f}=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$	$k_1=f(x_k,y_k)$, $k_2=f(x_k+h,y_k+h)$	Улучшенная ломаная
$\hat{f}=f\left(x_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{h}{2}k_1\right)$	$k_1=f(x_k,y_k)$.	
$\hat{f}=\frac{1}{6}(k_1+4k_2+k_3)$	$k_1=f(x_k,y_k)$, $k_2=f\left(x_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{h}{2}k_1\right)$, $k_3=f(x_k+h,y_k+2hk_2-hk_1)$.	Формулы Хойне
$\hat{f}=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$	$k_1=f(x_k,y_k)$, $k_2=f\left(x_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{h}{2}k_1\right)$, $k_3=f\left(x_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{h}{2}k_2\right)$, $k_4=f(x_k+h,y_k+hk_3)$	Формулы Рунге–Кутта

Раздел 18. РЯДЫ

Числовые ряды. Основные понятия

Основные понятия	Определение
Понятие числового ряда	$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – *числовой ряд*, где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – члены ряда, образующие бесконечную последовательность; a_n – общий член ряда. Ряд задан, если $a_n = f(n)$
Виды числовых рядов	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – *знакоположительный*, если $\forall a_n > 0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется *знакопеременным*. Ряд $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ – *знакочередующийся* , где $a_n \geq 0$
Частичные суммы ряда	$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \ldots$ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ – n-я *частичная сумма* ряда
Сходимость и сумма ряда	Если $\exists \lim_{n \to \infty} S_n = S$, то ряд называется *сходящимся,* а S – *суммой ряда*, в противном случае – ряд *расходящийся*
Свойства рядов	1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S , то $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$, где c – произвольное число, также сходится и его сумма равна cS . 2. Два сходящихся ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с суммами S и S' можно почленно складывать или вычитать. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходится и имеет сумму $(S \pm S')$. 3. Если у сходящегося (расходящегося) ряда отбросить конечное число его членов, то полученный ряд также будет сходится (расходится)

Признаки сходимости

Необходимый признак сходимости числового ряда

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие. Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

<table>
<tr><th>Название</th><th colspan="2">Определение</th></tr>
<tr><td>Первый признак сравнения</td><td colspan="2">Если $a_n \le b_n \ \forall n$, то:
1) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
2) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow$ расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$</td></tr>
<tr><td>Второй признак сравнения</td><td colspan="2">Если $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \quad (0 \le c \le \infty)$, то:
1) при $0 < c < \infty$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и расходятся одновременно;
2) при $c = 0$ из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Rightarrow$ сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
3) при $c = \infty$ из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Rightarrow$ расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$</td></tr>
<tr><td>Признак Даламбера</td><td>$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$</td><td rowspan="2">$\begin{cases} p < 1, \text{ряд сходится;} \\ p > 1, \text{ряд расходится;} \\ p = 1, \text{признак не работает} \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Радикальный признак Коши</td><td>$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$</td></tr>
<tr><td>Интеграль-ный признак Коши</td><td colspan="2">Пусть $f(x)$ − положительная, непрерывная и убывающая функция на $[1, \infty)$, такая, что $a_1 = f(1),\ a_2 = f(2), \ldots, a_n = f(n), \ldots,$
Если соответствующий несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится (расходится), то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится)</td></tr>
</table>

Рекомендации к использованию признаков сравнения

Ряды-эталоны	Сходимость рядов	П р и м е р
Геометрическая прогрессия	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lvert q\rvert < 1, \text{ ряд сходится;} \\ \lvert q\rvert \geq 1, \text{ ряд расходится} \end{cases}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится $(q = \frac{1}{3} < 1)$
Обобщённый гармонический ряд	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \alpha > 1, \quad \text{ряд сходится;} \\ 0 < \alpha \leq 1, \quad \text{ряд расходится} \end{cases}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$

Рекомендации к использованию признака Даламбера

Признак целесообразно применять, когда общий член содержит $n!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ – n-факториал). При $n \to \infty$ для приближенного вычисления $n!$ используется *формула Стирлинга:* $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Сходимость знакопеременных рядов

Виды сходимости	Определение
Абсолютная сходимость	Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно,* если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$, составленный из абсолютных величин, сходится
Условная сходимость	Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно,* если сам он сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ расходится
Достаточный признак сходимости для знакочередую-щегося ряда	*Теорема (признак Лейбница).* Знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится, если: 1) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т.е. $\forall n : a_n \geq a_{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Степенные ряды. Основные понятия

Основные понятия	Определение
Понятие степенного ряда	$a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ – *степенной ряд,* разложенный по степеням $(x-x_0)$, где постоянные $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, – коэффициенты ряда; $x \in R$ − действительная переменная; x_0 − некоторое постоянное число
Сходимость степенных рядов	Область сходимости – множество всех точек сходимости. Областью сходимости служит промежуток $(x_0 - R, x_0 + R)$, дополненный, быть может, его концами. Число R – *радиус сходимости.* Если ряд сходится во всех точках, то $R = \infty$. Радиус сходимости определяют по формуле: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}}$ или $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left\lvert \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right\rvert$
Свойства степенных рядов	1. Сумма степенного ряда − непрерывная функция в интервале сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$. 2. Степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ внутри интервала сходимости можно почленно складывать, вычитать и умножать. 3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{d(x-x_0)^n}{dx} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$. 4. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно интегрировать: $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. 5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$
Виды степенных рядов	*Ряд Тейлора для* бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$: $f(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$ *Ряд Маклорена* − частный случай ряда Тейлора при $x = 0$: $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots$

Основные понятия	Определение
Сходимость функции к ряду Тейлора	Представим функцию в виде: $f(x)=S_n(x)+R_n(x)$, где $S_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$; $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, c\in(a,x)$ – остаточный член в форме Лагранжа. *Теорема.* Ряд Тейлора сходится к функции $f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$

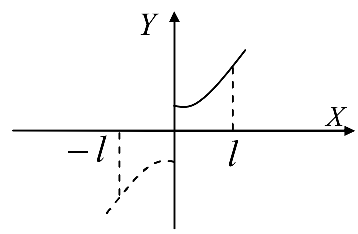
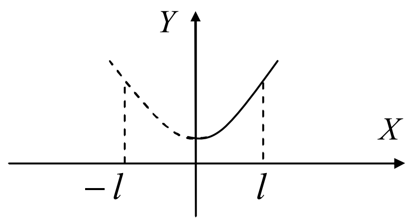
Разложение элементарных функций в ряд Маклорена

Разложение	Область сходимости
$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$	$x\in R$
$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$	$x\in R$
$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$	$x\in R$
$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...$	$x\in(-1,1]$
$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+...$	$x\in[-1,1]$, если $m\geq 0$; $x\in(-1,1]$, если $-1<m<0$; $x\in(-1,1)$, если $m\leq -1$
$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...$	$x\in[-1,1]$
$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...$	$x\in(-1,1)$

Ряды Фурье

Основные понятия	Определение
Тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$	$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, где a_0,a_n,b_n − коэффициенты Фурье, вычисляемые по формулам: $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$; $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad n=1,2,...;$ $b_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\quad n=1,2,...$
Тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[-l,l]$	$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{\pi nx}{l}+b_n\sin\dfrac{\pi nx}{l}\right)$, где $a_0=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx;$ $a_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{\pi nx}{l}dx,\quad n=1,2,...;$ $b_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{\pi nx}{l}dx,\quad n=1,2,...$
Достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье	*Теорема Дирихле*. Если функция $f(x)$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода на отрезке $[-\pi,\pi]$ и при этом монотонна или имеет конечное число экстремумов на $[-\pi,\pi]$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится $\forall x\in[-\pi,\pi]$ и его сумма равна: 1) $f(x)$ для всех точек непрерывности $x\in(-\pi,\pi)$; 2) $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ для всех точек разрыва I рода x_0; 3) $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ при $x=-\pi$ и $x=\pi$

Окончание таблицы

Основные понятия	Определение
Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций	$f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ четная, то $b_n=0$; $a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx$; $a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n=1,2,...$ $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ нечетная, то $a_0=0; \quad a_n=0;$ $b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n=1,2,...$
Представление непериодической функции рядом Фурье	Разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ на произвольном промежутке $[0,l]$ *Разложение по синусам* 1. Доопределить $f(x)$ нечетным образом на $[-l,0]$. 2. Разложить в ряд полученную  нечетную функцию $f^*(x)$ на $[-l,l]$. *Разложение по косинусам* 1. Доопределить $f(x)$ четным образом на $[-l,0]$.  2. Разложить в ряд полученную четную функцию $f^*(x)$ на $[-l,l]$

Раздел 19. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Волновое уравнение

Уравнение гиперболического типа, или волновое уравнение $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)$ $(a - \text{const})$, описывает процессы колебания струны, мембраны, газа и т.д. Характерная особенность процессов – конечная скорость распространения волны.

Однородное волновое уравнение: $U''_{tt}(x,t) = a^2 U''_{xx}(x,t)$	
Первая краевая задача Начальные условия: $U(x,0) = f(x)$, $0 < x < l$; $U'_t(x,0) = \varphi(x)$, $0 < x < l$. Граничные условия: $U(0,t) = 0$, $U(l,t) = 0$, $t > 0$ – концы струны $x = 0$ и $x = l$ жестко закреплены	$U(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{l}x\left(A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t\right)$ $A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx$, $B_n = \frac{2}{an\pi}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx$, $n = 1,2,...$
Вторая краевая задача Начальные условия: $U(x,0) = f(x)$, $0 < x < l$; $U'_t(x,0) = \varphi(x)$, $0 < x < l$. Граничные условия: $U'_x(0,t) = 0$, $U'_x(l,t) = 0$, $t > 0$ – концы струны свободны	$U(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos\frac{n\pi}{l}x\left(A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t\right)$ $A_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l f(x)dx$, $A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx$, $B_0 = 0$, $B_n = \frac{2}{an\pi}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx$, $n = 1,2,...$
Задача Коши Бесконечная струна: $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$. Начальные условия: $U(x,0) = f(x)$; $U'_t(x,0) = \varphi(x)$; $0 < x < l$	Формула Даламбера: $U(x,t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi(x)dx$

Уравнение теплопроводности

Уравнение параболического типа $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)$, или уравнение теплопроводности. Описывает задачи изучения теплопроводности и диффузии.

Уравнение теплопроводности: $U'_t = a^2 U''_{xx}$	
Первая краевая задача Начальное условие: $U(x,0) = f(x)$, $0 < x < l$; Граничные условия: $U(0,t) = U_1$, $U(l,t) = U_2$, $t > 0$	$U(x,t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l} x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \sin\frac{n\pi}{l} x$ $C_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l} x dx$, $n = 1,2,...$
Вторая краевая задача Начальное условие: $U(x,0) = f(x)$, $0 < x < l$; Граничные условия: $U'_x(0,t) = 0$, $U'_x(l,t) = 0$, $t > 0$	$U(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 \cdot t} \cdot \cos\frac{n\pi}{l} x$, $C_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l f(x)dx$, $C_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l} x dx$, $n = 1,2,...$
Задача Коши Начальное условие: $U(x,0) = f(x)$, $-\infty < x < +\infty$	Интеграл Пуассона: $U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cdot e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}} d\alpha$

Уравнение Лапласа

Уравнение эллиптического типа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$, или уравнение Лапласа, возникает при исследовании стационарных процессов.

Задача Дирихле для круга

Дан круг радиуса R с центром в начале координат и пусть на окружности задана непрерывная функция $f(\varphi)$. Найти функцию $U(r,\varphi)$, удовлетворяющую на окружности условию $U(r,\varphi)\big|_{r=R} = f(\varphi)$ и уравнению Лапласа в полярных координатах $r^2 U''_{rr} + rU'_r + U''_{\varphi\varphi} = 0$.

Р е ш е н и е

$$U(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)\cdot r^n,$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)d\varphi, \qquad A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos n\varphi \, d\varphi,$$

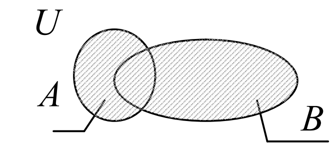
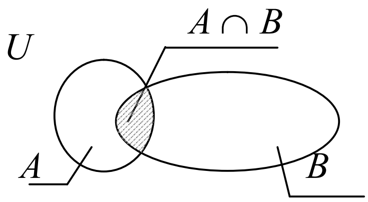
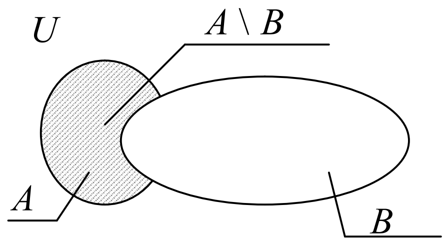
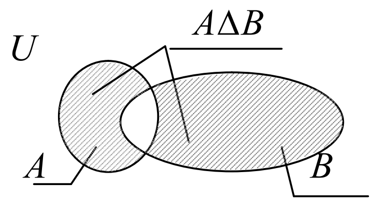
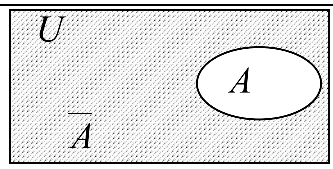
$$B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin n\varphi \, d\varphi, \ n = 1,2,...$$

Раздел 20. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Множества. Свойства и операции над ними

Множество M – объединение в единое целое определенных различимых объектов a, которые называются *элементами* множества. Множество, не содержащее ни одного элемента, – *пустое множество* ($\varnothing$). Если $A \subseteq B$, то A – *подмножество* множества B, если при этом $A \neq B$, то A – *собственное подмножество* множества B ($A \subset B$).

Геометрическое изображение операций над множествами – *диаграммы Венна.*

Название операции и обозначение	Определение	Диаграмма
Объединение $C = A \cup B$	$C = \{c \mid c \in A \text{ или } c \in B\}$	
Пересечение $C = A \cap B$	$C = \{c \mid c \in A \text{ и } c \in B\}$	
Разность $C = A - B$ или $C = A \setminus B$	$C = \{c \mid c \in A \text{ и } c \notin B\}$	
Симметричная разность $C = A \oplus B$ или $C = A \Delta B$	$C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	
Дополнение A в U $C = \overline{A}$	$C = U \setminus A$ $C = \{c \mid c \notin A\}$	

Свойства операций над множествами

Свойства множеств относительно операции объединения	Свойства множеств относительно операции пересечения
1. Коммутативность	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность	
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Дистрибутивность	
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. Идемпотентность	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
5. Закон де Моргана	
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. Операции с множеством $\varnothing$	
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
7. Операции с множеством U	
$A \cup U = U \Rightarrow U = \overline{\varnothing} \Rightarrow \overline{U} = \varnothing$	$A \cap U = A$
8. Законы поглощения:	
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
9. Свойства операции разности:	
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$	$A \setminus B = A \cap \overline{B}$, $A \setminus A = \varnothing$
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$	$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$	$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
10. Свойства операции симметричной разности:	
$A \Delta B = B \Delta A$	
$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$	
$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$	
$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$	

Бинарные отношения

Понятия	Определения	Примеры
Декартово произведение множеств A и B	$A \times B$ – множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары $\langle a, b \rangle$, где $a \in A, b \in B$	$A = \{1,2\}$; $B = \{2,3,4\}$ $A \times B = \left\{ \begin{matrix} \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \\ \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle \end{matrix} \right\}$ $B \times A = \left\{ \begin{matrix} \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \\ \langle 3,2 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle \end{matrix} \right\}$

Окончание таблицы

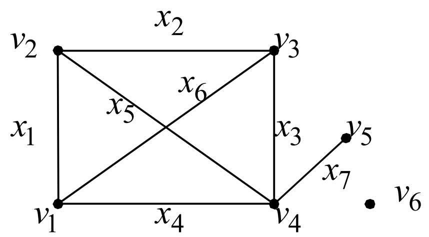
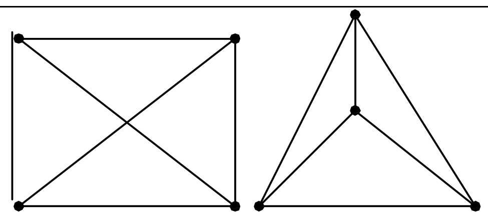
Понятия	Определения	Примеры
Бинарное отношение	R – всякое подмножество декартова произведения, т.е. $R \subseteq A \times B$. Обозначение: $x R y$, т.е. x находится с y в отношении R или $\langle x, y \rangle \in R$	$\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow$ "x *меньше* y" $R = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle\}$
Обратное бинарное отношение	$R^{-1} = \{\langle a, b \rangle \mid \langle b, a \rangle \in R\}$	$R = \{\langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,2 \rangle\}$
Свойства		
Рефлексивность	$\forall a \in A : \langle a, a \rangle \in R$	$(\|\|), (\sim)$
Антирефлексивность	$\forall a \in A : \langle a, a \rangle \notin R$	$(\langle), (\rangle)$, $(\perp)$
Симметричность	$\forall a,b \in A : \langle a,b \rangle \in R \Rightarrow \langle b,a \rangle \in R$	$(=), (\sim), (\|\|), (\perp)$
Транзитивность	$\forall a,b,c \in A : \langle a,b \rangle \in R$ *и* $\langle b,c \rangle \in R \Rightarrow \langle a,c \rangle \in R$	$(=), (\sim), (\|\|), (\leq), (\geq), (\subset)$

Правила и формулы комбинаторики

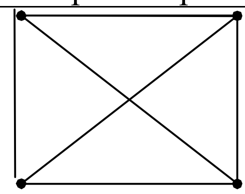
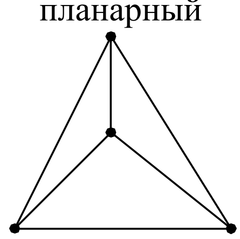
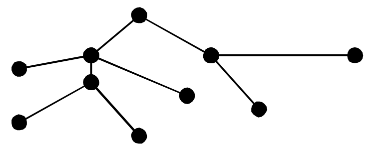
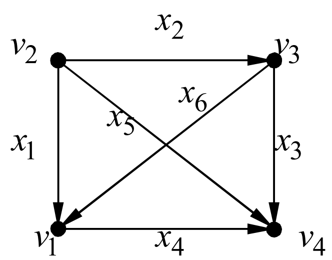
Правила комбинаторики	
Правило умножения Если из некоторого конечного множества объект a можно выбрать n_1 способами, а объект b – n_2 способами, то оба объекта (a **и** b) можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами	*Правило сложения* Если из некоторого конечного множества объект a можно выбрать n_1 способами, а объект b – n_2 способами, причем способы не пересекаются, то любой из объектов (a **или** b) можно выбрать $n_1 + n_2$ способами

Формулы комбинаторики			
Схема выбора	Размещения	Перестановки	Сочетания
Без возвращения	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	$P_n = n!$	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
С возвращением	$\overline{A}_n^m = n^m$	$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}$	$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

Основные понятия теории графов

Понятие	П р и м е р
Граф $G(V,X)$ представляет собой непустое множество *вершин* $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ и множество *ребер X,* оба конца которых принадлежат множеству *V*	
Если $x=(v_1,v_2)$ – ребро графа, то вершины v_1 *и* v_2 *инцидентны* ребру *x*	Вершины v_2 *и* v_4 инцидентны ребру x_5
Два ребра, инцидентные одной вершине, – *смежные*	Ребра x_1,x_2,x_5 смежные, т.к. инцидентны вершине v_2
Степень вершины $d(v)$ графа – число ребер, которым эта вершина инцидентна. Если $d(v)$=0, то вершина *изолированная*, если $d(v)$=1, то *висячая*	$d(v_2)=3$, вершина v_5 – висячая, вершина v_6 – изолированная
Маршрут (путь) для графа *G(V,X)* – последовательность $v_1x_1v_2x_2v_3...x_kv_{k+1}$.	$v_1x_1v_2x_2v_3x_3v_4x_5v_2$
Длина маршрута – количество ребер в нем	Если M=$v_1x_1v_2x_2v_3x_3v_4x_5v_2$, то $\|M\|=4$
Маршрут *замкнутый*, если его начальная и конечная точки совпадают, т.е. $v_1=v_{k+1}$	$v_1x_1v_2x_2v_3x_3v_4x_5v_2x_1v_1$
Незамкнутый маршрут (путь) – *цепь*. Цепь, в которой все вершины попарно различны, называется *простой цепью*	$v_2x_2v_3x_3v_4$
Замкнутый маршрут (путь) – *цикл (контур)*. Цикл, в котором все вершины попарно различны, называется *простым циклом*.	$v_2x_2v_3x_3v_4x_5v_2$
Две вершины графа *связные*, если существует соединяющая их простая цепь	Вершины v_1 и v_3 связные, т.к. $\exists\ v_1x_1v_2x_2v_3$
Два графа *изоморфны*, если существует взаимно-однозначное соответствие между множествами их вершин и ребер	

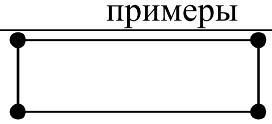
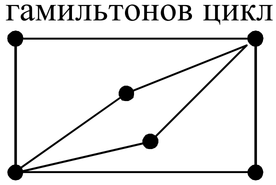
Виды графов

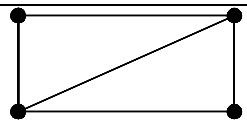
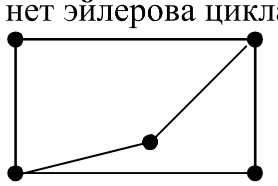
<table>
<tr><th>Вид графа</th><th>П р и м е р ы</th></tr>
<tr><td>Граф связный, если каждые две его вершины связные</td><td rowspan="3">
$G_1(X,V)$ – полный, связный и планарный

$G_2(X,V)$ – плоское изображение графа $G_1(X,V)$</td></tr>
<tr><td>Граф полный, если каждые две его вершины соединены одним и только одним ребром</td></tr>
<tr><td>Граф плоский (планарный), если его можно изобразить на плоскости так, что все пересечения его ребер являются вершинами графа</td></tr>
<tr><td>Граф G называется деревом, если он является связным и не имеет циклов.</td><td rowspan="2">
$G_3(X,V)$ – лес</td></tr>
<tr><td>Граф G, все компоненты связности которого являются деревьями, называется лесом</td></tr>
<tr><td>Если элементы множества X упорядоченные пары, то граф называется ориентированным, или орграфом. Если $x=(v_1,v_2)$ – дуга орграфа, то вершина v_1 – начало, а вершина v_2 – конец дуги x. Дуга $x=(v_1,v_1)$ – петля
Степень входа вершины орграфа – число входящих в вершину ребер, степень выхода – число выходящих из вершины ребер
Источником называется вершина, степень входа которой равна нулю, а степень выхода положительна
Стоком называется вершина, степень входа которой положительна, а степень выхода равна нулю
Путь в орграфе – последовательность ориентированных ребер.</td><td>

Вершина v_2 – источник, вершина v_4 – сток.
Путь : $v_2 \to v_3 \to v_4$</td></tr>
</table>

Цикл – замкнутый путь	

Типы графов

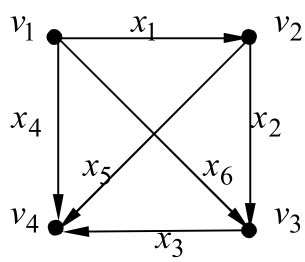
Определение	Условия существования	Иллюстрирующие примеры
Путь (цикл), содержащий все ребра графа и притом по одному разу, называется *эйлеровым* путем (циклом). Граф, обладающий эйлеровым циклом (путем), называется эйлеровым	*Критерий существования эйлерова цикла:* степени всех графа четные *Критерий существования эйлерова пути:* граф имеет ровно две вершины нечетной степени	 Есть эйлеров и гамильтонов цикл.  Есть эйлеров цикл, но нет гамильтонова цикла.

Путь (цикл), содержащий все вершины графа по одному разу, называется *гамильтоновым*. Граф, обладающий гамильтоновым циклом (путем), называется гамильтоновым	*Достаточные условия существования* 1. Всякий полный граф является гамильтоновым. 2. Если граф, помимо простого цикла, содержит и другие ребра, то он также является гамильтоновым. 3. Если граф имеет гамильнов цикл, то он может иметь и другие гамильтоновы циклы	 Есть гамильтонов, но нет эйлерова цикла.  Нет ни эйлерова, ни гамильтонова цикла

Операции над графами

Название операции	Обозначение	Определение
Дополнение $G(V,X)$	$\overline{G}\ (V,\overline{X})$	$\overline{X}=\{x\in V\times V;\, x\notin X\}$
Объединение графов	$G_1(V_1,X_1)\cup G_2(V_2,X_2)$ $(V_1\cap V_2=\varnothing,\quad X_1\cap X_2=\varnothing)$	$G(V,X):V=V_1\cup V_2$, $X=X_1\cup X_2$
Пересечение графов	$G_1(V_1,X_1)\cap G_2(V_2,X_2)$	$G(V,X):V=V_1\cap V_2$, $X=X_1\cap X_2$
Сумма по модулю	$G_1(V_1,X_1)\oplus G_2(V_2,X_2)$ $(V_1\cap V_2=\varnothing,\quad X_1\cap X_2=\varnothing)$	$G(V,X):V=V_1\cup V_2$, $X=X_1\oplus X_2$

Способы задания графов

Название	Способ задания	П р и м е р
Аналити-ческий	Бинарное отношение R на множестве $V=\{v_i\}, i=\overline{1,n}$	$V=\{1,2,3,4\}$ $\langle x,y\rangle\in R\Leftrightarrow "x<y"$ 

<table>
<tr>
<td>Матрица смежности графа $G(V,X)$ $V=\{v_1,...,v_n\}$</td>
<td>$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$ $$a_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j)\in X; \\ 0, & \text{если } (v_i, v_j)\notin X \end{cases}$$</td>
<td>
<table>
<tr><td>v_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Матрица инцидент-ности орграфа $G(V,X)$ $V=\{v_1,...,v_n\}$ $X=\{x_1,...,x_m\}$</td>
<td>$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$$ $$a_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ если } x_j \text{ исходит из } v_i; \\ -1, \text{ если } x_j \text{ заходит } \textit{в } v_i; \\ 0, \quad \text{если } x_j \\ \text{не инцидентна } v_i \end{cases}$$</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>x_4</td><td>x_5</td><td>x_6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>-1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Раздел 21. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Операции над высказываниями

Высказыванием P называется предложение, к которому возможно применить понятия истинно *И* или ложно *Л*.

П р и м е р. «2+3=5» – *И*; « Москва – столица Казахстана» – *Л*.

<table>
<tr><th>Название операции и обозначение</th><th>Определение</th><th>Таблица истинности</th></tr>
<tr><td>Отрицание
($\neg$)
связка «не»</td><td>Высказывание $\neg P$ (или $\overline{P}$)
истинно $\Leftrightarrow$ P ложно</td><td><table><tr><td>P</td><td>¬ P</td></tr><tr><td>И</td><td>Л</td></tr><tr><td>Л</td><td>И</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Конъюнкция
($\wedge$ или &)
связка «и»</td><td>Высказывание $P \wedge Q$ истинно $\Leftrightarrow$
истинны оба высказывания</td><td><table><tr><td>P</td><td>Q</td><td>P ∧ Q</td></tr><tr><td>И</td><td>И</td><td>И</td></tr><tr><td>И</td><td>Л</td><td>Л</td></tr><tr><td>Л</td><td>И</td><td>Л</td></tr><tr><td>Л</td><td>Л</td><td>Л</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Дизъюнкция
($\vee$)
связка
«или»</td><td>Высказывание $P \vee Q$ ложно $\Leftrightarrow$
ложны оба высказывания</td><td><table><tr><td>P</td><td>Q</td><td>P ∨ Q</td></tr><tr><td>И</td><td>И</td><td>И</td></tr><tr><td>И</td><td>Л</td><td>И</td></tr><tr><td>Л</td><td>И</td><td>И</td></tr><tr><td>Л</td><td>Л</td><td>Л</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Импликация
($\Rightarrow$)
связка
«если …, то…»</td><td>Высказывание $P \Rightarrow Q$ ложно $\Leftrightarrow$
P истинно, а Q – ложно</td><td><table><tr><td>P</td><td>Q</td><td>P ⇒ Q</td></tr><tr><td>И</td><td>И</td><td>И</td></tr><tr><td>И</td><td>Л</td><td>Л</td></tr><tr><td>Л</td><td>И</td><td>И</td></tr><tr><td>Л</td><td>Л</td><td>И</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Эквиваленция
(~ или $\Leftrightarrow$)
связка
«тогда и только тогда»</td><td>Высказывание $P \sim Q$ истинно
$\Leftrightarrow$ истинности высказываний P и Q
совпадают</td><td><table><tr><td>P</td><td>Q</td><td>P ~ Q</td></tr><tr><td>И</td><td>И</td><td>И</td></tr><tr><td>И</td><td>Л</td><td>Л</td></tr><tr><td>Л</td><td>И</td><td>Л</td></tr><tr><td>Л</td><td>Л</td><td>И</td></tr></table></td></tr>
</table>

С помощью таблиц истинности можно составлять таблицы истинности сложных формул. Формулы *эквивалентны,* если им соответствуют одинаковые таблицы истинности.

Булевы функции

Булева функция $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – n-местная функция, аргументы и значения которой принадлежат множеству $\{0, 1\}$.

Если логические высказывания могут принимать значения истинно или ложно, то для булевой функции аналогами этих значений будут значения 1 или 0. Для булевых функций справедливы таблицы истинности и основные равносильности алгебры высказываний. Дополнительно вводятся операции: $X_1 \mid X_2 = \overline{X_1 \wedge X_2}$ – *штрих Шеффера* и $X_1 \downarrow X_2 = \overline{X_1 \vee X_2}$ – *стрелка Пирса.*

X_1	X_2	$\neg X_1$	$X_1 \wedge X_2$	$X_1 \vee X_2$	$X_1 \Rightarrow X_2$	$X_1 \Leftrightarrow X_2$	$X_1 \mid X_2$	$X_1 \downarrow X_2$
1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1

Основные законы математической логики

Название	Закон относительно операции конъюнкции	Закон относительно операции дизъюнкции
Тавтология	$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$
Коммутативность	$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$
Ассоциативность	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
Дистрибутив-ность	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
Законы де Моргана	$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$	$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
Законы поглощения	$x \wedge (x \vee y) = x$	$x \vee (x \wedge y) = x$
Операции с 0 и 1	$x \wedge 1 = x$; $x \wedge 0 = 0$	$x \vee 1 = 1$; $x \vee 0 = x$
Закон дополнитель-ности	$x \wedge \overline{x} = 0$	$x \vee \overline{x} = 1$
Закон склеивания	$(y \vee x) \wedge (y \vee \overline{x}) = y$	$(y \wedge x) \vee (y \wedge \overline{x}) = y$
Закон ортогонализации	$x \vee (\overline{x} \wedge y) = x \vee y$	
Закон импликации	$x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y$	
Инверсия	$\overline{\overline{x}} = x$	

П р и м е р. Доказать с помощью таблиц истинности справедливость формул де Моргана $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$.

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Закон справедлив, так как совпадают столбцы истинности для формул $\overline{x \vee y}$ и $\bar{x} \wedge \bar{y}$.

Формы представления булевых функций

Пусть $x^0 = \bar{x}, \quad x^1 = x, \delta \in \{0,1\}$. $x^\delta = \begin{cases} x, \text{если} & \delta = 1 \\ \bar{x}, \text{если} & \delta = 0 \end{cases}$ – *литера.*

Совершенные формы	Формула
Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)– конъюнкция конституент нуля	$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge\limits_{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \\ \text{на которых} \\ f(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = 0}} \left(\bigvee\limits_{i=1}^{n} x_i^{\overline{\delta_i}} \right)$
Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – дизъюнкция конституент единицы	$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee\limits_{\substack{\text{по всем наборам} \\ (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \\ \text{на которых} \\ f(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = 1}} \left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} x_i^{\delta_i} \right)$

П р и м е р

x	y	$f(x, y) = \overline{x \vee y}$	Элементарные конъюнкции	Элементарные дизъюнкции
0	0	1	$x^0 \wedge y^0 = \bar{x} \wedge \bar{y}$	
0	1	0		$x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} = x^1 \vee y^0 = x \vee \bar{y}$
1	0	0		$x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} = x^0 \vee y^1 = \bar{x} \vee y$
1	1	0		$x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{1}} = x^0 \vee y^0 = \bar{x} \vee \bar{y}$

СДНФ: $f(x, y) = \bar{x} \wedge \bar{y}$,

СКНФ: $f(x, y) = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$.

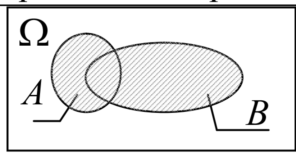
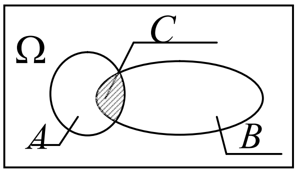
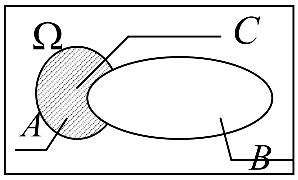
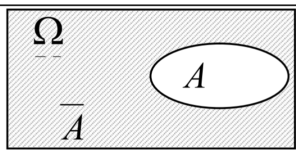
Раздел 22. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайные события и действия над ними

Событие – явление, которое может произойти или не произойти при осуществлении определенной совокупности условий.

Событие называется *достоверным* **(Ω)**, если оно обязательно произойдет в результате данного опыта. Событие называется *невозможным* (Ø), если оно заведомо не произойдет в результате данного опыта. Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же опыте. В противном случае события называются *совместными*. *Полная группа событий* (Ω) – это совокупность единственно возможных событий испытания.

Действия над событиями

Название операции	Определение	Теоретико-множественная трактовка операций
Сумма $C = A + B$	Событие C состоит в наступлении хотя бы одного из событий (или A, или B, или A и B вместе)	
Произведение $C = A \cdot B$	Событие C состоит в совместном наступлении событий (A и B одновременно)	
Разность $C = A - B$	Событие C означает, что происходит событие A, но не происходит событие B	
Противоположное событие $C = \overline{A}$	Событие C происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A	

Вероятность события

1) *Классическое* определение вероятности: $P(A)=\frac{m}{n}$,

здесь m – число случаев, благоприятствующих событию A; n – общее число равновозможных и попарно несовместных случаев.

Следствия. $0 \le P(A) \le 1$; $P(\varnothing)=0$; $P(\Omega)=1$, $P(\overline{A})=1-P(A)$.

2) *Статистическое* определение вероятности.

$\varpi=\frac{m}{n}$ – *относительная частота* события, где m – число случаев наступления события (частота); n – общее число испытаний.

Статистической вероятностью события A в данном испытании называют число $P(A)$, около которого колеблется относительная частота события A при достаточно большом числе испытаний.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теоремы сложения	*Теоремы умножения*
1.Если A, B – несовместные события, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$ 2. Если A, B – совместные события, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 3. Если $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу событий, то $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1$, 4. Если $A_1, A_2, ..., A_n$ – совместные события, то $P(A_1+...+A_n)=1-P\left(\overline{A_1+...+A_n}\right)=$ $=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot...\cdot\overline{A_n})$	*1.Условная вероятность* $P_A(B)$: вероятность события B при условии, что произошло событие A $P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 2. Если A, B – зависимые события, то $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A)$ 3. Если A, B – независимые события, то $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$
Следствия из теорем сложения и умножения	
Формула полной вероятности $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+...+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)$, где $H_1, H_2, ..., H_n$ – *гипотезы* (попарно несовместные события, образующие полную группу, т.е. $\sum_{i=1}^{n}H_i=\Omega$, $H_i\cdot H_j=\varnothing\ \forall i\neq j$). *Формула Байеса* $P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}$	

Последовательность независимых испытаний

$P_n(k)$ вероятность появления события A k раз в n независимых испытаниях		
Точная формула (формула Бернулли)	Локальная формула Муавра–Лапласа	Формула Пуассона
Условия применения формул		
n – невелико	n – велико; $np > 10$	n – велико; np – невелико
Формула		
$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где $P(A) = p$, $q = 1 - p$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса, значения которой табулированы (прил. 1), $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$	$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$

Интегральная теорема Лапласа

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближённо равна

$$P(k_1, k_2) \cong \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа, значения которой табулированы (прил. 2), $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

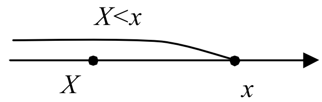
Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в схеме независимых испытаниях:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Формы закона распределения случайной величины

Случайная величина (СВ) – величина, которая в результате испытания может принимать то или иное значение, заранее неизвестное. *Дискретная* случайная величина (ДСВ) принимает конечное или счетное множество значений, *непрерывная* случайная величина (НСВ) принимает значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Закон распределения СВ – любое правило (таблица, функция, график), позволяющее находить вероятности произвольных событий.

<table>
<tr><td>СВ</td><td colspan="2">Форма закона распределения СВ</td></tr>
<tr><td>ДСВ</td><td>Ряд распределения
<table><tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$\dots$</td><td>x_n</td></tr><tr><td>p_1</td><td>p_2</td><td>$\dots$</td><td>p_n</td></tr></table>где $p_i = P(X = x_i); \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$</td><td rowspan="2">Функция распределения
$F(x) = P(X < x), \ -\infty < x < +\infty.$
Геометрическая интерпретация


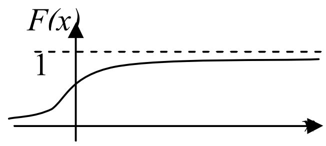
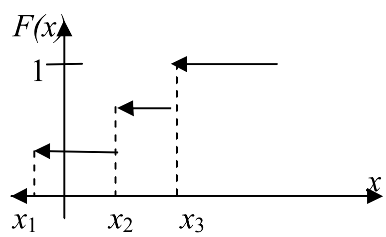
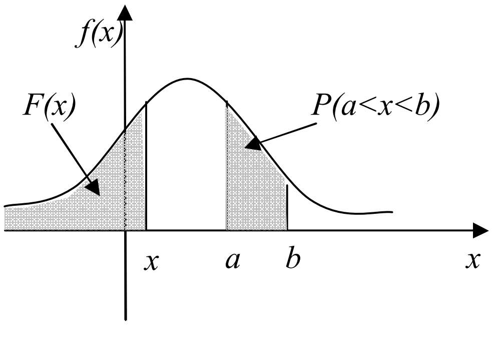
Свойства F(x)
1. $F(-\infty) = 0;$
2. $F(+\infty) = 1;$
3. $0 \le F(x) \le 1, -\infty < x < +\infty;$
4. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е.
$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$
5. $P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$
График F(x) для НСВ


График F(x) для ДСВ

</td></tr>
<tr><td>НСВ</td><td>Плотность распределения вероятностей
$f(x) = F'(x)$

Свойства f(x):
1. Неотрицательность: $f(x) \ge 0$
2.Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$
4. Связь с функцией распределения:
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

</td></tr>
</table>

Числовые характеристики случайной величины

Числовые характеристики	Дискретная случайная величина	Непрерывная случайная величина
Математическое ожидание	$MX = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$, где $p_i = P(X = x_i)$	$MX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$, где $f(x)$ – функция плотности
Дисперсия	$DX = M(X - MX)^2$ или $DX = MX^2 - (MX)^2$.	
	$DX = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2$	$DX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right]^2$
Среднее квадратическое отклонение	$\sigma = \sqrt{DX}$	

Свойства числовых характеристик

Математическое ожидание	Дисперсия
1. $MC = C$, где C – константа; 2. $M(CX) = CMX$; 3. $M(X + Y) = MX + MY$; 4. $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$ – для независимых случайных величин.	1. $DC = 0$, где C – константа; 2. $D(CX) = C^2 DX$; 3. $D(X \pm Y) = DX + DY$ для независимых случайных величин.

Моменты случайных величин

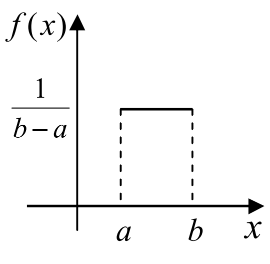
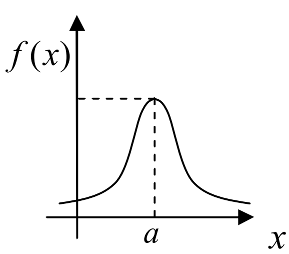
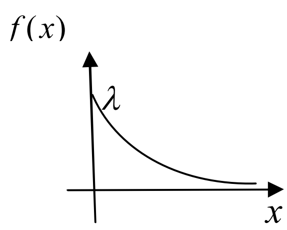
Моменты	ДСВ	НСВ
Начальный момент порядка k	$\alpha_k = M(X^k)$	
	$\alpha_k = \sum\limits_{i} x_i^k \cdot p_i$	$\alpha_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$
Центральный момент порядка k	$\mu_k = M(X - MX)^k$, $A = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ – коэффициент асимметрии $E = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ – коэффициент эксцесса («островершинности»)	
	$\mu_k = \sum\limits_{i} (x_i - MX)^k p_i$	$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^k f(x)dx$

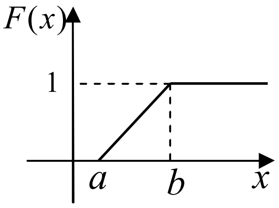
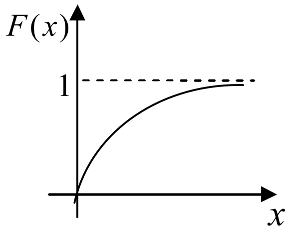
Основные законы распределения вероятностей

Законы распределения дискретной случайной величины

Закон	*Биномиальный*	*Распределение Пуассона*	*Геометрическое распределение*
Формула	$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$P_n(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, здесь $\lambda = np$	$P_n(k) = q^{k-1} p$, здесь $k = 1,2,\ldots$
Числовые характеристики	$MX = np$, $MX = a$ Наивероятнейшее число k_0 наступлений события: $np - q \le k_0 \le np + p$	$MX = \lambda$, $DX = \lambda$	$MX = \dfrac{1}{p}$, $DX = \dfrac{q}{p^2}$

Законы распределения непрерывной случайной величины

Закон	*Равномерный*	*Нормальный*	*Показательный*
Обозначение	$R[a,b]$	$N(a,\sigma)$	–
Функция плотности	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x \in (a,b), \\ 0 & \text{при } x \notin (a,b) \end{cases}$ 	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$; $-\infty < x < +\infty$, a, σ – параметры закона распределения 	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$, где $\lambda > 0$ – параметр закона распределения 

Интег-ральная функция	$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & b<x<+\infty\end{cases}$ 	$F(x)=0{,}5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа, значения которой табулированы (прил. 2)	$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$ 
Число-вые харак-терис-тики	$MX=\frac{a+b}{2}$, $DX=\frac{(b-a)^2}{12}$	$MX=a$, $DX=\sigma^2$	$MX=\frac{1}{\lambda}$, $DX=\frac{1}{\lambda^2}$
Вероят-ность попа-дания в интер-вал (α,β)	$P(\alpha<X<\beta)=$ $=\int\limits_\alpha^\beta\frac{1}{b-a}dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$	$P(\alpha<X<\beta)=$ $=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ: $P(\lvert X-a\rvert<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ *Правило трех сигм* $P(\lvert X-a\rvert<3\sigma)\approx 0{,}997$	$P(\alpha<X<\beta)=$ $=\int\limits_\alpha^\beta\lambda e^{-\lambda x}dx=$ $=-e^{-\lambda x}\Big\vert_\alpha^\beta=$ $=e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}$

Закон больших чисел

1) *Неравенство Чебышева:* $P(\lvert X-MX\rvert<\varepsilon)\ge 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$.

2) *Теорема Чебышева.* Если $X_1,X_2,\ldots,X_n$ – последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной C $\left(DX_i\le C,\ i=\overline{1,n}\right)$, то

$$\forall\varepsilon>0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n MX_i\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Раздел 23. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

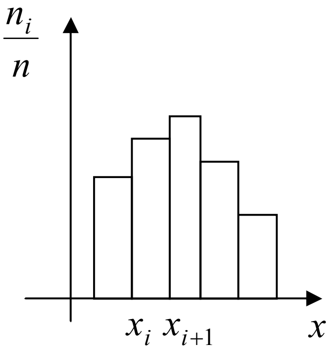
Выборки

X − некоторая случайная величина. Совокупность результатов n измерений $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины X называют *выборкой*, а случайную величину X − *генеральной совокупностью*.

Разобьем действительную ось на конечное число промежутков $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k$. Подсчитаем число n_i − выборочных значений, лежащих в промежутке Δ_i, $(1 \le i \le k)$. $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$, где n − объем выборки.

Статистический ряд распределения

Δ_1	Δ_2	$\cdots$	Δ_k
x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_1	n_2	$\cdots$	n_k



Графическое изображение интервального статистического ряда называют *гистограммой.*

Эмпирическая функция распределения: $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x − число выборочных значений, меньших x; n − объем выборки.

Статистические оценки параметров распределения

Точечные оценки основных параметров распределения

<table>
<tr><td rowspan="2">Оцениваемый параметр генеральной совокупности</td><td colspan="2">Выборочная точечная оценка</td></tr>
<tr><td>Простая выборка $x_1, x_2, ..., x_n$,
где n − объем выборки</td><td>Сгруппированная выборка
$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ \hline n_1 & n_2 & \cdots & n_k \\ \hline\end{array}$
n_i − число выборочных значений признака x_i,
$\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$ − объем выборки</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

Генеральная средняя или математическое ожидание $MX=a$	Средняя арифметическая $\overline{x}$	
	$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$	$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k}x_i n_i$
Генеральная дисперсия σ^2 (математическое ожидание a известно)	Выборочная дисперсия S^2	
	$S^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$	$S^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i-a)^2 n_i$
Генеральная дисперсия σ^2 (математическое ожидание неизвестно)	$S^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$	$S^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k}\left(x_i-\overline{x}\right)^2 n_i$
	Исправленная выборочная дисперсия $\overline{S}^2$	
	$\overline{S}^2=\frac{n}{n-1}S^2$	
Генеральное среднее квадратическое отклонение σ	Выборочное среднее квадратическое отклонение S	
	$S=\sqrt{S^2}$	

Метод моментов нахождения точечных оценок параметров распределения

Идея метода – приравнивание теоретических моментов распределения соответствующим эмпирическим моментам, найденным по выборке, т. е. $\alpha_k=\alpha_k^*$, $\mu_k=\mu_k^*$. Имеем: $\alpha_1=MX$, $\mu_2=DX$.

Предполагаемый закон распределения	$X\sim N(a,\sigma)$	$X\sim R[a,b]$	Показательный закон
Метод моментов	$\begin{cases}MX\approx\overline{x},\\ DX\approx S^2\end{cases}$	$\begin{cases}MX=\dfrac{a+b}{2}\approx\overline{x},\\ DX=\dfrac{(b-a)^2}{12}\approx S^2\end{cases}$	$MX=\frac{1}{\lambda}\approx\overline{x}$
Оценки параметров	$\begin{cases}a\approx\overline{x},\\ \sigma^2\approx S^2\end{cases}$	$\begin{cases}a\approx\overline{x}-\sqrt{3}\,S^2,\\ b\approx\overline{x}+\sqrt{3}\,S^2\end{cases}$	$\lambda\approx\frac{1}{\overline{x}}$

Интервальные оценки

Доверительный интервал – это интервал, который с заданной доверительной вероятностью γ (надежностью) покрывает оцениваемый параметр.

Доверительные интервалы для параметров нормального распределения		
Оцениваемый параметр	Дополнительные условия	Интервальная оценка параметра
Генеральная средняя или математическое ожидание *MX=a*	σ^2 известно	$\left(\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где t – из равенства $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ по таблице функции Лапласа (прил. 2)
	σ^2 неизвестно	$\left(\bar{x} - t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$, где t_γ находят по таблице t – распределения Стьюдента (прил. 3) для заданных n и γ
Генеральная дисперсия σ^2	a известно $n \le 30$	$\left(\frac{\sqrt{n}\cdot S}{\chi_2}, \frac{\sqrt{n}\cdot S}{\chi_1}\right)$, где $\chi_1^2 = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n}$, $\chi_2^2 = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n}$ – квантили χ^2-распределения с n степенями свободы (прил. 4)
	a неизвестно	$\left(\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_2}, \frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_1}\right)$, где $\chi_1^2 = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}$, $\chi_2^2 = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}$ – квантили χ^2- распределения с n степенями свободы (прил. 4)

Проверка статистических гипотез о законе распределения генеральной совокупности

Статистическая гипотеза – это любое предположение о виде неизвестного закона распределения или о параметрах.

Проверить статистическую гипотезу – значит проверить, согласуются ли выборочные данные с выдвинутой гипотезой. При этом возможны следующие ошибки:

1) ошибка первого рода – отвергнуть верную гипотезу;
2) ошибка второго рода – принять неверную гипотезу.

Уровень значимости α – вероятность совершения ошибки первого рода. Чем меньше уровень значимости (обычно полагают равным 0,05; 0,01 и т.д.), тем меньше вероятность совершить ошибку первого рода.

Метод проверки гипотезы с помощью критерия Пирсона χ^2

1. Определить меру расхождения между теоретическим и выборочным распределениями по формуле $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(np_i^* - np_i\right)^2}{np_i}$,

где $p_i^* = \frac{n_i}{n}$ – относительная частота; p_i – вероятность попадания возможных значений случайной величины в промежуток Δ_i.

Для вычисления вероятностей p_i используют следующие формулы:

а) $p_i = P\left(x_i < X < x_{i+1}\right) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(\widetilde{x}_i\right)dx$, где $\widetilde{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$;

б) в случае гипотезы о нормальном распределении

$$p_i = P\left(x_i < X < x_{i+1}\right) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}}{\overline{S}}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\overline{S}}\right);$$

в) приближенная формула $p_i \approx f\left(\widetilde{x}_i\right)\Delta_i$.

2. Определить число степеней свободы $r = k - l - 1$, где k – число интервалов; l – число параметров распределения.

Например, если $X \sim N(a, \sigma)$, то оценивают два параметра (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение), следовательно, число степеней свободы $r = k - 3$.

3. Выбрать уровень значимости $\alpha = 1 - \gamma$. По таблице распределения χ^2 (прил.4) по уровню значимости и числу степеней свободы *r* найти $\chi^2_{\alpha,r}$.

4. Если $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,r}$, то гипотеза отвергается; если $\chi^2 \le \chi^2_{\alpha,r}$, то с вероятностью $p = 1 - \alpha$ гипотеза $\chi^2_{\alpha,r}$ принимается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев И.И. Краткий справочник по высшей математике / И.И. Алиев. – М.: ИП РадиоСОФТ, 2006.
2. Алимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О.Е. Алимов. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
3. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986.
4. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике / М.Я. Выгодский. – М.: АСТ: Астрель, 2003.
5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: АСТ: Астрель, 2006.
6. Галушкина Ю.И. Конспект лекций по дискретной математике / Ю.И. Галушкина. – М.: Айрис-пресс, 2007.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2000.
8. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. для втузов / Н.С. Пискунов. В 2-х т. Т. I: Интеграл-Пресс, 2002.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. для втузов / Н.С. Пискунов. В 2-х т. Т. II: Интеграл-Пресс, 2002.
11. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2005.
12. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2008.
13. Цикунов А.Е. Сборник математических формул / А.Е. Цикунов. – СПб.: Питер, 2006.
14. Цыпкин А.Г. Математические формулы. Алгебра. Геометрия. Математический анализ / А.Г. Цыпкин, Г.Г. Цыпкин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.

Предметный указатель

Н

О

П

Т

Х

Ц

Ч

Ш

Э

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Значения функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3856	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3696
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2372	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0081
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0061
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0046
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0034
3,0	0,00447	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0025
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0018
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0013
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0009
3,4	0012	0012	0012	0011	00111	0010	0010	0010	0009	0006
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	
4,0	0001									

Приложение 2. Интеграл вероятностей $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	446164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49537	49560	49573	49585	49589	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49741	49846	49851	49856	49861
3,0	49865									
3,5	4997674									
4,0	4999683									
4,5	4999966									
5,0	4999973									

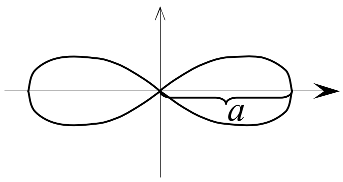
Приложение 3. Квантили t − распределения Стьюдента
(k − число степеней свободы)

k	Уровень значимости α (двухсторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	3,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,876	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,05	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

Приложение 4. Квантили $\chi^2_{\alpha,k}$ распределения χ^2_k (k − число степеней свободы)

k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,65	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,26
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,3	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

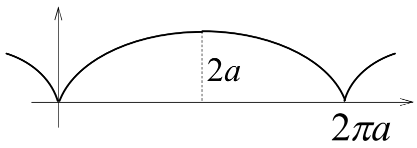
Замечательные кривые



Лемниската Бернулли

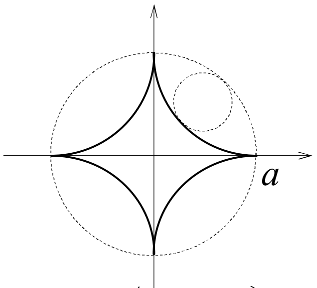
$$\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right) \text{ или}$$

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi .$$



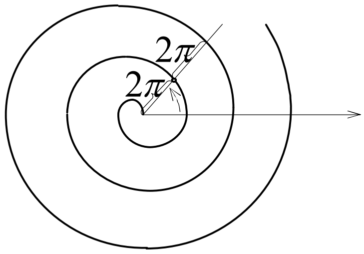
Циклоида

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$$



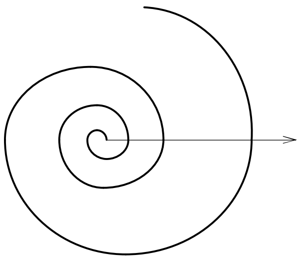
Астроида

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \text{ или } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} .$$



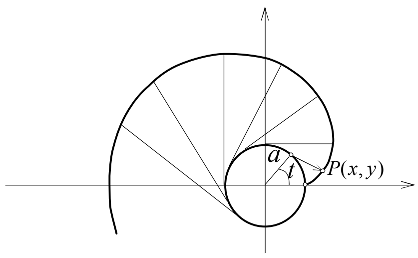
Спираль Архимеда

$$r = a\varphi \quad (r \geq 0).$$



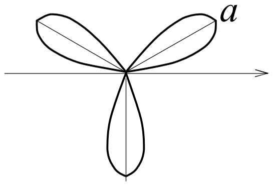
Логарифмическая спираль

$$r = e^{a\varphi} .$$



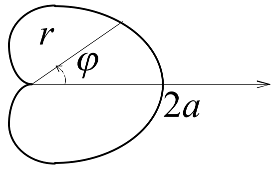
Эвольвента (развертка) окружности

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$$



Трехлепестковая роза

$$r = a\sin 3\varphi \quad (r \geq 0).$$



Кардиоида

$$r = a(1+\cos\varphi)$$

Учебное издание

Ирина Владимировна Бабичева,
Татьяна Ерофеевна Болдовская

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ
(В ФОРМУЛАХ, ТАБЛИЦАХ, РИСУНКАХ)

Учебное пособие

***

Редактор Т.И. Кукина

***

Подписано к печати 16.06.10. Формат 60×90 1/16. Бумага писчая
Оперативный способ печати. Гарнитура Times New Roman
Усл. п. л. 9,25, уч-изд. л. 6,73. Тираж 400 экз. Заказ №____. Цена договорная
Издательство СибАДИ, 644099, г. Омск, ул. П.Некрасова, 10
Отпечатано в подразделении ОП издательства СибАДИ